

青 年 学 者 文 库

康德的数学哲学

Kant's Philosophy of Mathematics

包向飞 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

该书一共分为四章。第一章主要讨论的是康德与数学哲学中的主要人物和流派的关系。在这一章里，作者以问题为线索，阐述了数学哲学中的一些主要思想和疑难，论证了数学命题不可能是重言式的分析命题。第二章主要讨论在现代数学背景下康德的几何观。在这一章里人们将看到，在避免了康德的一个思维跳跃的前提下，现代的各种各样的几何学和康德的时空-几何观之间并不存在本质的矛盾；并且现代的各种各样的几何学都可以在康德的“纯直观”上建立起来。第三章主要讨论了现代数学中的连续性问题。在这一章里，作者力图展示：正因为现代数学的集合论在测度论的视角下并不能十分令人满意地解决连续和测度的问题，数学可以还原为集合论的说法还存在着很多疑难。鉴于此，作者跟随康德，认为数学本质上需要纯直观。第四章主要阐述“建基在纯直观上的数学”的可行性和特点。

责任编辑：顾素萍
责任校对：刘　欣
版式设计：马　佳
封面设计：王荆强


ISBN 978-7-307-10331-3
9 787307 103313 >
定价: 20.00元



青 年 学 者 文 库

康德的数学哲学

Kant's Philosophy of Mathematics

邑向飞 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

康德的数学哲学/包向飞著．—武汉：武汉大学出版社，2013.1
青年学者文库
ISBN 978-7-307-10331-3

Ⅰ．康…　Ⅱ．包…　Ⅲ．康德，I.（1724～1804）—数学哲学—研究
Ⅳ．①B516.31　②01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 289113 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：刘　欣　　版式设计：马　佳

出版发行：**武汉大学出版社**　（430072　武昌　珞珈山）
（电子邮件：cbs22@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn）
印刷：武汉中远印务限公司
开本：880×1230　1/32　印张：7　字数：185 千字　插页：2
版次：2013 年 1 月第 1 版　　2013 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-10331-3/B・366　　定价：20.00 元

阅读说明

为了使本书增加一些趣味性，我对本书中涉及的一些重要人物插录了小传。通过这些小传，人们可以了解更多的背景知识，从而阅读本书更加顺畅。当然，关于人物传记性的内容不能无中生有，在人物传记的材料方面，我主要依据的是德文版的《维基自由百科》，并对相关的内容进行了编译和整理，因此，在这些小传里，省去了详细的注解，但是如果涉及其他书本的材料，则一一作了脚注。在阅读时，人们可以完全不读这些小传，不会影响阅读的完整性。在本书后还有若干附录，旨在从数学技巧方面展示在本书中只简单地作为结论出现的内容。也可以略去不读。

目　录

引　言

一、康德和数学哲学

1. 康德数学哲学在其整个哲学中的地位

康德对数学的讨论在他的整个著作中所占的比重并不大。除了在《纯粹理性批判》的《先验感性论》中，康德对数学有相对比较集中的讨论外，其他的地方都是些零星的讨论，并且，在这些讨论中，数学也并不是真正的主角，比方说，在《纯粹理性批判》的《导言》中康德主要是利用数学来表明在人类的知识中存在着先天综合判断。康德说："不难指出，在人类知识中会现实地有这样一些必然的和在严格意义上普遍的、因而纯粹的先天判断。如果想从科学中举出一个例子，那么我们只需把目光投向一切数学命题；"①而在《纯粹理性批判》的《先验方法论》的第一节中，数学执行的主要是一个参照系的功能，康德的目的是通过对比哲学知识和数学知识，

① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B5.

从而更清楚地向人们表明纯粹理性的运用范围和能力界限。总之，康德的目的并不是要专门为数学建立起一种哲学；康德的数学哲学是为他的整个批判哲学服务的。但这一切也并不意味着康德的数学哲学在康德的整个哲学中是不重要的。“数学”，在康德那里，尤其是在康德的《纯粹理性批判》里，稍微夸张一些地说，起着范例和参照系的作用。范例表达着康德的工作所想企及的目标；对于参照系，虽然我们并不需要时刻关注它，但是没有了它，我们也就没有了对比的标准。康德在《导言》中说：“于是纯粹理性的真正课题就包含在这个问题之中：先天综合判断是如何可能的?”①可见，存在着“先天综合命题”对康德哲学来说是多么的重要。而正是数学给我们提供了一个光辉的范例，因为在康德看来，数学命题都是先天综合命题。如果说连在数学中都不存在先天综合命题，那么康德的“在形而上学中应该包含先天综合知识”的论证就会显得虚弱得多，不可信得多。美国的数学哲学家 M. 克莱因(Morris Kline，1908—1992)在其《数学与知识的探求》一书中说：“……他(康德)将数学真理的存在作为其哲学的中心支柱。”②德国数学家希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)也在他的《论无限》中说，对数学和逻辑关系的讨论，是康德学说的主要部分。③ 可见，在这些数学(哲学)家眼里，数学哲学在康德的批判哲学中处于中心地位。当然，

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B20.

② [美]克莱因 M. 数学与知识的探求．刘志勇，译．上海：复旦大学出版社，2005：18.

③ 参见：大卫·希尔伯特．论无限．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：220. 希尔伯特的原话是这样的：“康德教导我们——而且这是他学说的主要组成部分——数学处理的题材是与逻辑无关地被给定的。”

从心理学的角度来看，数学家眼中更容易看到和数学有关的东西，所以他们的观点我们并不能十分严肃地对待，更不能把他们的观点看成定论，但是，至少我们得承认康德的数学哲学在康德的整个学说中并不是不重要的。显然，研究康德的数学哲学是研究康德哲学的重要组成部分。尤其是在康德的道德哲学逐渐成为康德研究焦点的今天，对康德数学哲学的研究就显得越发重要了。毕竟，对哲学的研究并不是一项追逐时髦的活动。

2. 康德数学哲学在数学哲学中的地位

康德虽然对数学的讨论与其整个哲学著述相比并不是很多，但是，在数学哲学中，很多主要人物和流派都与康德有着密切的联系。这是一个非常引人注目，并且值得注意的现象。希尔伯特，一般被认为是一个形式主义者，但是，在有限算术方面他却表现得像是一个彻头彻尾的康德主义者，他时刻谨记康德的告诫，不过，为了能够涵盖整个经典数学，他给有限算术添加了“理想元素”。弗雷格(Gottlob Frege，1848—1925)，可以被认为是一个逻辑主义者和柏拉图主义者，在算术方面，他是康德的坚决反对者，但是他却完全接受康德关于几何命题是先天综合命题的观点。布劳威尔(Luitzen E. J. Brouwer，1881—1966)，出名的直觉主义者和建构主义者，反对康德的几何观，在算术上却是一个康德算术观的追随者和支持者。逻辑实证主义者们极力地反对康德的“算术和几何的命题是先天综合命题”的观点，而他们和康德的联系却是显而易见的，尽管是作为完全对立的一方。我们可以毫不夸张地说：在数学哲学中，无论你是否赞同康德的数学观，康德的数学哲学本身仍然是一种严肃的、真正的数学哲学。康德对数学的讨论无疑是数学哲学中的经典文献，它不仅是我们思想的出发点，是供我们研究和批判的对象，而且，对现今数学哲学中的疑难，康德的数学观仍然可

以给我们提供很多建设性的启发。

二、康德数学哲学的研究状况

虽然数学哲学中的许多主要人物和流派都与康德有着思想上的联系，但是他们和康德相同的一面却经常被当今的人们所忽略，而他们和康德不同的地方却经常被后来的研究者所夸大。对于这种现象，除了用“学术中的流行”来解释外，仿佛很难找到其他太合理的解释，比方说希尔伯特、弗雷格等经常被解释为康德数学哲学的坚决反对者[①]。结果是，在现代数学的影响下，有些现代的学者对康德的数学哲学是不屑一顾的。如果说现在对康德数学哲学还存在一些研究，那么基本上都是些“否定性的、批驳性的”研究，也就是说，是一些对康德数学观的否定和非难。在这里，我引用一些段落来表明这种状况（在这些引言中，有的只是被引用者对康德数学哲学的处境的总结，但它们并不代表被引用者的基本观点）。弗里德曼（Michael Friedman）在《康德和精确科学》（*Kant and the Exact Sciences*）一书中如下地总结了康德几何观的处境：“自从20世纪早期的几何学哲学家像罗素、卡尔纳普、石里克和赖欣巴哈的重要著作问世以后，康德的关于几何学的批判理论已经看起来不是很有吸引力了。在他们的著作出现之后，以及在黎曼、希尔伯特和爱因斯坦的数学成果出现以后，而罗素他们也是从这些数学家获得启发的，康德的几何观看起来，说得好听一点儿，有些古色古香，说得不好听一些，有些愚蠢。康德的几何学是建基在我们的时空直观之

① 任何学问中都有流行现象，说得好听一些是“时代潮流”，这种现象本也无可厚非，但是对于一个以反思为其主要目的的学问来说，追逐时髦就显得很不恰当.

上的设想看起来完全是错了……"①上面提到的美国的数学哲学家M. 克莱因也在他的著作《数学与知识的探求》中不无讽刺地说："康德在哲学上的大胆为其几何学上的鲁莽所超越，因为尽管他从来没有走出其东普鲁士的故乡柯尼斯堡城十英里之外，他仍能确定关于世界的几何学。"②德国著名的康德专家奥特弗里德·赫费(Otfried Höffe)在其《康德》一书中这样总结说："在近代的研究中对数学的先天综合性质的批评几乎成了普及性的知识财富。"③从这些学者们的总结和评论中我们可以清楚地看到，康德的数学哲学在今天是如何被研究的了。当然，我的意思并不是说康德的数学哲学不应该受到非难和批评；恰恰相反，我们认为批判是哲学的主要任务之一。但是，在对康德数学哲学的一片声讨声中，借助现代几何哲学家的观点和现代数学对康德的批驳添砖加瓦并不是一件很值得夸耀的事情，这样做很难摆脱百犬吠声之嫌。我个人的观点是：哲学的重大意义恰恰在于：在人们都认为是正确的地方提供合理的批评；在人们都认为是错误的地方，提供合理的辩护，之所以如此，因为我们经常会思想懒惰，人云亦云。

对于康德的数学哲学，也存在一些"其他类型"的研究，这样

---

① 英语原文是："Since the important work of early twentieth-century philosophers of geometry such as Russel, Carnap, Schlick and Reichenbach, Kant's critical thoery of geometry has not looked very attrative. After their work and the work of Rieman, Hilbert, and Einstein from which they drew their inspiration, Kant's conception is liable to seem quaint at best and silly at worst. His picture of geometry as somehow grounded in our intuition of space and time appears thoroughly wrong ..."参见：Michael Friedman. Kant and the Exact Sciences. Massachusetts and London: Harvard University Press, 1992: 55.

② [美]克莱因 M. 数学与知识的探求. 刘志勇，译. 上海：复旦大学出版社，2005：17.

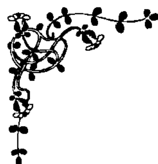
③ [德]奥特弗里德·赫费. 康德：生平、著作与影响. 郑伊倩，译. 北京：人民出版社，2007：51.

的研究几乎都是由康德专家在做。在这些研究中，当然也不乏对康德数学哲学的精辟见解，但是这些研究康德的学者面对的是整个的康德哲学，所以，他们对康德数学哲学的研究是零星的，而他们的目的又往往是力图阐明康德的数学观在康德哲学内部的作用和意义。像康德自己一样，他们的注意力并没有放在数学哲学方面。有的康德学者主要是从历史的角度来研究康德的数学哲学，比方说康德的时空数学观与牛顿的、莱布尼茨-沃尔夫的比较，所以他们也很少照顾到在现代数学中所发生的事情，进而做一些有建设性的比较研究。还有些康德学者所做的研究是用现代数学的方法与视角阐发一些康德数学哲学的问题。我们上面引用的 Michael Friedman 就是这样的一位学者，他说："我们不应该运用我们现代的逻辑概念来蔑视早期的空间理论，认为它们不值一提；我们应该把现代的逻辑概念作为工具来阐明和解释这些理论……"①虽然这些研究都是一些很有意义的研究，但是后果也是显然的，面对近现代数学哲学家，比方说像赖兴巴哈(Hans Reichenbach，1891—1953)这样的几何哲学家，对康德数学观的诸多批评，他们的声音就显得很微弱，以至于给人们这样一种感觉：康德的数学观不仅是过时的，而且是完全错误的。

在本书中，我将力图表明：康德的数学哲学并不是陈列在博物馆里的仅供观瞻的东西，它并不是"落后"的见证，也不像其他古董一样只具有一些"文化和收藏"的价值；康德的数学哲学至今还具有不一般的生命力。我认为，我们应该抛弃一些现代几何哲学家的偏见和骄傲；像大数学家希尔伯特和布劳威尔一样，深刻地理解康德的告诫，严肃地对待数学哲学中的问题。也许这样，我们能对

① 英语原文是："Instead of using our modern conception of logic to disparage and dismiss earlier theories of space, we schould use it as a tool for interpreting and explaining these theories ..."参见：Michael Friedman. Kant and the Exact Sciences. Massachusetts and London：Harvard University Press，1992：56.

现代数学哲学中存在的疑难获得一些通向解答的线索。



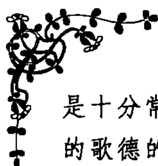
插录
康德小传



康德(Immanuel Kant)，1724年4月22日生于柯尼斯堡(Königsberg)，1804年2月12日死于柯尼斯堡。康德对于柯尼斯堡，真是生于斯，长于斯，死于斯。康德在他的一生中，只是短暂地离开过柯尼斯堡。柯尼斯堡现在叫加里宁格勒(Kaliningrad)，加里宁格勒是加里宁格勒州的州府，它是俄罗斯联邦最小的州，它位于俄罗斯的西部边境。因此有些人认为，康德应该算作俄罗斯人。这样的看法是没有任何道理的，因为第一，柯尼斯堡在当时属于普鲁士；第二，康德的活动和影响都在说德语的文化圈内。康德大概活了80岁，在那个年代，绝对属于高龄。康德一般被认为是一个启蒙哲学家，但是，毋庸置疑，康德是西方最重要的哲学家之一。从哲学史的角度上来看，康德的著作《纯粹理性批判》标志着哲学史的一个重要的转折点和现代哲学的开始。康德不仅在知识论方面影响巨大，在伦理学和美学方面，康德哲学所引发的讨论至今也没有停息。

康德的父亲是一个制革师父，康德的母亲也出生于制革的家庭，他们一共生育了8个子女，康德排行第四，然而8个子女中却只有4个活到了成年，但在那个年代这也





是十分常见的事情，很多名人的家庭也都如此，比康德晚的歌德的家庭也是这样。康德的家庭受虔敬主义影响很大，不过，康德的母亲在教育方面十分开明，她总是试图让孩子受到很好的教育。康德8岁的时候就被送到弗里德里希中学(Collegium Fridericianum)。在中学里，母亲让康德去掌握希腊语、拉丁语等古典语言，大概她想让康德成为古典语言学家。康德16岁的时候，已经开始在柯尼斯堡大学学习。虽然早期的康德的传记记载说康德开始学习的是神学，但是这一点并不能被校方的文件证明。但是，无论如何，康德对自然科学很感兴趣，他在大学里学习了哲学、古典的自然科学、物理学和数学。并且，逻辑学和形而上学的教授马丁·克努岑(Martin Knutzen)使康德熟悉了莱布尼茨和牛顿的思想。

1746年，22岁的康德就发表了论文《对活力的正确评价》。但是由于父亲的死，以及克努岑教授不承认他的论文作为毕业论文，康德中断了学业。于是，他开始了自己做家庭教师的生活。而康德在凯瑟尔灵珂家的(Familie Keyserlingk)家教生活使他走向当时柯尼斯堡上层社会成为可能。1754年，30岁的康德又返回到柯尼斯堡大学，重新开始了自己的学业，在这期间克努岑教授已经死去。第二年(1755年)，康德就发表了自己的第一篇重要论文《自然通史和天空的理论》。康德的《自然通史和天空的理论》与拉普拉斯在1796年发表的理论相似，因而在19世纪，该理论以"康德-拉普拉斯原理"闻名于世。同年，康德撰写了自己的教授资格论文《形而上学知识的原理》。





据此，31 岁的康德成为柯尼斯堡大学的私人讲师①。康德承担的课程多到令人难以置信的程度，他教授的课程有：逻辑学、形而上学、人类学、道德哲学、自然神学、数学、物理学、机械力学、地理学、教育学和自然法学。

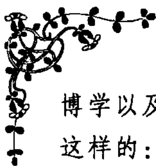
康德的讲课特点不在于按部就班的教学方法，他也不通过重复来强调自己的讲课内容，也不善于循循善诱不太聪明的学生，因此在课堂上，每个学生都必须时时集中精神，否则可能跟不上。康德也不赞成一直低头做笔记，他认为许多注重细节的学生常会抄写下不重要的内容，却漏掉了真正的重点。在他是年轻讲师的时候，他也欢迎提问。②

也许人们会认为，康德教授了这么多课程，课程的质量肯定不能保证。康德确实对自己所承担的繁重课程抱怨过。不过，事实上康德的课程很受大学生欢迎。赫尔德(Johann Gottfried Herder)于 1762 年到 1764 年在康德那里听过课，他后来是这样称赞康德的："带着感激的喜悦我去回忆在我青年时期和一位哲学家的结识以及他教授的课程，对我来说，他是一位真正的人道主义老师……他的哲学唤起了我自己的思想，我几乎不能设想有比他的课程更



① 私人讲师的意思是，大学不支付薪水，靠学生支付的钟点费，因此收入的多寡完全看讲师能吸引多少学生。

② 参见：[美]库恩．康德传．黄添盛，译．上海：上海人民出版社，2007：139.



博学以及更有影响的课程。"①博罗夫斯基对康德的评价是这样的："康德的讲课是即兴的，时而(展现出)机智和幽默，(他常常)引述他最近读到的著作，偶尔也会加上一些轶事，却不至于偏离主题。许多其他的老师用来活跃气氛，却让有教养的学生敬而远之的低俗性的笑话，我还不曾从他的口中听到过。"②

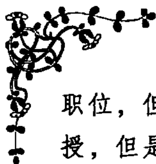
在这里，我想提请注意的是，康德不仅在大学里学过数学与物理，而且他还在大学里教授过数学和物理。通常康德的数学、物理课都是两个学期，在下学期他教授算术、几何、三角，上学期则是机械论、流体静力学、气压测量学和水力学。就单单凭这一点，那些认为康德完全对数学无知的观点是站不住脚的。从年代上讲，康德晚于牛顿和莱布尼茨，当然更晚于笛卡儿和费马，在康德生活的年代，微积分已经相当普遍了，并且，从康德留下的论文来看，他对笛卡儿、莱布尼茨以及牛顿的思想和著作是十分熟悉的，因此康德不可能在大学的数学讲堂上整天讲小学数学。

1759 年，35 岁的康德申请逻辑学和形而上学教授的



① 德语原文："Mit dankbarer Freude erinnere ich mich aus meinen Jugendjahren der Bekanntschaft und des Unterrichts eines Philosophen, der mir ein wahrer Lehrer der Humanität war [...] Seine Philosophie weckte das eigne Denken auf, und ich kann mir beinahe nichts Erleseneres und Wirksameres hierzu vorstellen, als sein Vortrag war."

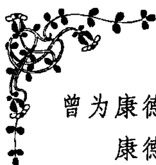
② 转引自：[美]库恩．康德传．黄添盛，译．上海：上海人民出版社，2007：139.



职位，但是他没有成功。同年，他有机会作诗学艺术的教授，但是他拒绝了。在1766年到1772年间，康德的职务是普鲁士王家宫殿图书馆的地位不高的图书管理员，这是康德的第一份固定的职业，因为在当时的德国，私人讲师不能算做正式的职业。1770年，康德在46岁的时候终于成为柯尼斯堡大学的逻辑学和形而上学教授。令人奇怪的是，康德在聘为教授的这一年又提交了一份题为《感官和理智世界的形式和根据》的博士论文。1778年，康德拒绝了当时著名的大学——哈勒大学(Universität von Halle)的加盟邀请，尽管他在哈勒大学的报酬会明显高于他在柯尼斯堡大学的报酬，尽管当时的文化部长封·策德利茨(von Zedlitz)极力地请求康德去哈勒大学。1786年到1788年期间，康德担任了柯尼斯堡大学的校长，1787年63岁的康德成为柏林科学院的院士。

但是在康德生命的最后15年，他和普鲁士官方检控机构的矛盾却不断升级，原因之一就是：在普鲁士国王弗里德里希二世去世后，弗里德里希·威廉二世即位，他任命沃尔纳(Wöllner)做文化部长，而新的文化部长却很不喜欢康德。1794年，在康德70岁的时候，文化部长沃尔纳颁发公告，说康德侮辱了基督教和《圣经》的一些主要的和基本的学说。教学到72岁的康德却被要求放弃宣讲和发表自己的宗教论著，因为普鲁士官方认为康德的宗教学说不符合《圣经》，他们认为康德的宗教学说里充斥着自然神论和反三位一体的思想。对此，康德的朋友比斯特尔(Johann Erich Biester)，他也是柏林《单子》杂志的出版者，





曾为康德在国王面前申诉，但是国王拒绝了这一申诉。

康德经常被描绘成一个死板的，每天都有着一个固定日程的教授形象，并且这个教授被自己内心的义务所驱使，每天只专注于自己的工作，根本不懂得生活。这种康德形象其实并不太符合事实。做学生时，康德打牌打得很好，用现在的中国话说，是打麻将、斗地主和打双生的高手。康德打台球更是出色，他甚至用打台球的方式为自己的学习赢得了一些收入。康德也很爱社交活动，在社交场合中康德对女士彬彬有礼，他也很会献殷勤，颇具骑士风度。每逢社交场合，康德都穿着入时，以他渊博的学识赢得了上流人士的喜爱。康德的肚子里储藏着无穷无尽的、轻松搞笑的逸闻趣事，但是康德在讲述它们的时候却表现得一本正经，自己从来不笑。总之，康德很幽默，他也知道如何在恰当的场合使用自己的幽默，用中国人的说法就是，他很懂得什么时候丢包袱。

康德也不是书呆子。康德曾敦促赫尔德，不要像母鸡孵卵似的整天读书。从康德对赫尔德的敦促可以看出，康德是反对死读书的。哈曼(Hamann)甚至还担心康德会卷进社交的漩涡分散了精力，以至于没有足够的时间工作。只有在康德过了40岁，出于对自己健康的考虑，他才对自己规定了严格的日程安排。海涅(Heinrich Heine)对此曾有过形象的描述，不过海涅的描述可能夸张了点，海涅这样写道：每天早上4:45，康德都让自己的仆人用一句“是时候了!”的呼喊叫醒，工作到22点康德上床睡觉。午饭的时候，康德多半会邀请朋友，但他拒绝谈论哲学话题。此外，他每天都会在同一个时间散步。

康德一生未婚。



第一章

康德和数学哲学中的主要人物和流派

在这一章里，将主要论述康德与数学哲学中的主要人物和流派的关系，并在不具体涉及康德时空观的情况下，初步建立这样的一种观点：数学命题作为先天综合命题。当然，这也完全是康德关于数学命题的观点。康德在《纯粹理性批判》中清楚地说："数学的判断全部都是综合的。"①但是我们必须注意到：康德说数学命题是先天综合命题，这并不意味着任何数学命题在任何可能的意义上都是先天综合命题，而是说全部数学并不能还原成"就其自身而言就分析地真着的命题"。用我们现在的话说，就是：整个数学并不是一个庞大的重言式。对此，康德有很好的说法："……一个综合命题固然可以根据矛盾律来理解，但只能是这样来理解，即有另外一个综合命题作为前提，它能从另外一个综合命题中推出来，而绝不是就其自身来理解的。"②也就是说，一个综合命题也可以看成是分析的，但却是在这种意义上，即它可以从其他的综合命题（按照既定

---

① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B15.

② ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B15.

的推演规则)推导出来，而不是“就其自身”分析地真着。有人可能会提出这样的批评：康德说“数学的判断全部都是综合的”，而“三角形有三个角”是一个数学判断，并且这一判断是一个分析判断，并且它就其自身分析地真着，因此，康德的“数学的判断全部都是综合的”论断是错误的。这样的批评只是巧妙地歪曲了康德的意思。康德当然会承认“三角形有三个角”是一个分析命题，因为正是康德第一次清晰地区分了分析命题和综合命题，对此，我们在本书中还要详细论及。不过，康德大概不会承认它是一个真正的数学判断。如果人们把“三角形有三个角”这样的判断归为数学判断，并且康德本人也会同意的话，那么康德肯定会爽快地修正说“数学中存在着先天综合命题”。其实，这也正是康德的用意所在，即“在人类的知识中存在先天综合命题”，对康德来说，这已经够了。因为在任何知识的门类中我们都可以造出大量的、像“三角形有三个角”这样的分析命题，用这样的分析命题的存在来驳斥康德，显然是太取巧了，也太小瞧了康德的智商，并且这也丝毫没有触动康德数学哲学的内核。其实，要想驳倒康德，人们必须像逻辑实证主义那样去论证：“所有的数学命题其实都是分析命题。”

第一节　康德和逻辑实证主义

一、先天综合命题在康德哲学中的含义

在康德之前，就有分析命题和综合命题的区分了，但是，康德是第一个系统地、清楚地做出了这样的区分。对于什么是分析的，什么是综合的，康德是这样说的：“……要么是谓词 B 属于主词 A，是(隐蔽的)包含在 A 这个概念中的东西，要么是 B 完全外在于概念 A，虽然它与概念 A 有关联。在前一种情况下我把这判断叫做分

析的，在第二种情况下则称为综合的。”①

我们可以看几个简单的例子，来获得一些具体的了解：

康德式的分析命题：

所有的物体都是有延展的。(隐蔽的包含)

白马是白色的。(明显的包含)

康德式的综合命题：

所有的物体都是有重量的。(“有重量的”外在于“物体”这个概念)

了解康德著作的人都知道，在康德的知识论系统里，先天综合命题是至关重要的，可以这样说，如果没有了先天综合命题，康德的知识论也就立不住了，那么，在康德那里，什么是先天综合命题呢？

对于什么是先天的，康德是这样说的：“所以我们在下面将把先天的知识理解为并非不依赖于这个那个经验，而是完全不依赖于任何经验所发生的知识。”②此外，康德还给出了先天知识的简明标志，他说：“……必然性和严格普遍性就是一种先天知识的可靠标志，而两者也是不可分割的相互从属的。”③

结合上面康德对综合命题的定义，我们可以看出，在康德那里，先天综合知识(命题)就是完全不依赖于任何经验的知识(命题)，它是必然的和严格普遍的，但它又不是“自身”分析的。很容易看出，如果存在这样的知识，它的正确与否完全不受经验的检验，因为它本身不依赖于任何经验。

---

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A7/B11.

② [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B3.

③ [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B4.

二、逻辑实证主义对分析命题和综合命题的重新界定及其疑难

逻辑实证主义者们接受了康德的“分析命题和综合命题”的提法，但是他们认为康德对这两种命题的界定是不清楚的，他们重新界定了分析命题和综合命题。在这里，我们首先看一下逻辑实证主义的代表之一——艾耶尔(Alfred Jules Ayer，1910—1989)对分析命题和综合命题的界定：“当一个命题的效准仅依据于它所包括的那些符号的定义，我们称之为分析命题，当一个命题的效准决定于经验事实，我们就称之为综合命题。”①

逻辑实证主义者们大多拒斥康德的先天综合判断(命题)，他们认为，如果一个命题是先天的、必然的，那么它就是分析命题，是重言式命题，所以先天综合命题是没有的。

我们可以看一下艾耶尔自己的表述：“事实上，任何必然命题无例外地都是分析命题，或者，换句话说，都是重言式命题。”②“……说一个命题是先天地真，就是说它是一个重言式命题。重言式命题虽然可以指导我们去进行对知识的经验探索，但重言式命题本身并不包括关于任何事实的报道。”③

我们可以稍微比较一下康德和艾耶尔在对分析命题和综合命题下定义时他们心目中的逻辑。通常的对康德的批评是：康德的定义是建立在主谓逻辑的基础上的，而艾耶尔的定义却可以把现代逻辑(比方说关系逻辑)也包含在内，因此康德对分析命题的理解过分狭窄了。这些批评都是有其道理的，但是，我们可以这样为康德辩

① [英]艾耶尔 A J. 语言、真理与逻辑. 尹大贻，译. 上海：上海译文出版社，2006：54.

② [英]艾耶尔 A J. 语言、真理与逻辑. 尹大贻，译. 上海：上海译文出版社，2006：60.

③ [英]艾耶尔 A J. 语言、真理与逻辑. 尹大贻，译. 上海：上海译文出版社，2006：63.

护，康德对逻辑有着和现代很不同的理解，康德从一开始就对纯形式化的逻辑是不满意的，他说："一切判断的逻辑形式在于其中所含概念的统觉的客观统一"，等等。[①] 所以，在康德所理解的逻辑里，总包含有"能动的东西"，而带系词的主谓逻辑很适合展示这种"能动性"。[②] 康德忽略"关系逻辑"很可能与他这一思想有关，但我们并不能因此推断说：康德是反对关系逻辑的。

现代的分析哲学一般是这样来界定分析命题和综合命题的：分析命题的真取决于组成它的表达(或者说符号)的含义，它是一个"语言内"的事情；而综合命题的真却取决于"语言外"的事实。[③] 但是这样的界定对康德来说也许是不恰当的，因为康德在对分析命题进行定义时并没有明显地考虑"语义"这样一个因素，对于康德来说，分析所涉及的不是语义规则，而是主词与谓词的"概念"关系，而"概念"并不总是等于有明确语义的"被定义的符号"，概念总包含着某种实在性的东西，所以，我们完全有理由认为，在康德那里，"分析性真实的"并不等于"根据定义是真实的"。当然，你可以像逻辑实证主义一样，认为这是康德的不清楚的地方。但是，这里还包含一些值得深思的地方，因为什么是"语言内"呢？语言的界限在哪里？"语义"真的能被封闭在一个语言内部吗？如果认为"分析命题的'真'可以在语言内决定，而综合命题的'真'需要语言外的事实"，那么逻辑实证主义就不能逃脱蒯因(W. V. O. Quine, 1908—2000)在《经验论的两个教条》一文中所作的批评，诚如蒯因所言，对于逻辑实证主义来说："……分析陈述和综合陈述之间的

---

① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B140-B141.

② 参见：邓晓芒．康德先验逻辑对形式逻辑的奠基．//康德哲学诸问题．北京：生活·读书·新知三联书店，2006.

③ 参见：Sathis Psillos. Philosophy of Science A-Z. Edinburgh：Edinburgh University Press，2007：11.

分界线却一直根本没有画出来。"①这些都是值得深思的地方。不过，鉴于我们的目的，在这里就不再展开讨论了。

现在，我们来看两个逻辑实证主义眼中典型的分析命题，以便对它们有一些确实的了解：

"或者有单身汉是黑皮肤的，或者没有单身汉是黑皮肤的。"

"没有一个未婚的男子是已婚的。"

从这两个例子我们可以看出，在逻辑实证主义眼中，分析命题就是：单从句子本身来看，它就得是分析地真着。

三、几何学的命题是先天综合命题还是分析命题？

现在我们把目光转向数学命题，康德认为数学命题是先天综合命题，而逻辑实证主义者们认为数学命题是彻底的分析命题。逻辑实证主义的又一代表人物——克拉夫特（Victor Kraft，1900—1975）在《维也纳学派》中这样写道："数学命题并不是像康德和穆勒所相信的那样是综合的，它们是分析的。仅仅依据概念的定义就可以知道数学命题的真假。数学命题就是运用概念的定义而构成的，它们仅仅是重言式——维特根斯坦的这个术语用于表示这样一些命题，这些命题从它们的逻辑形式就已经可以看出它们是真的。通过用演绎系统的形式构造数学……清楚地揭示了数学的分析性质。数学的分析性质说明了数学的先天有效性。数学仅仅处理概念的连接，数学并不处理经验的实在。因此，根本不需要为先天综合判断的有效性寻找根据，根本不需要用'纯粹理性'、'纯粹直觉'、'直观'或'自明性'来提供这种根据，甚至也不要求经验提供这种根据。分析关系是逻辑关系而不是经验关系，而逻辑关系仅仅是符号系统内部的关系。逻辑的自律性源于下列事实，即逻辑并不包含关于世界的基本定律而只包含关于思考世界之思维的基本定律。这样，逻辑

---

① ［美］蒯因 W V O. 从逻辑的观点看. 陈启伟，等，译. 北京：中国人民大学出版社，2007：38.

和数学相对于经验的自律性就很容易地得到了辩护。"①

从以上的引言我们可以清楚地看出，在"数学命题"这个问题上，逻辑实证主义者们和康德是针锋相对的。

他们谁更有道理？我们先从几何学入手。我们先来看一个简单的几何学的例子："三角形的内角和是 180 度"。对于康德来说，这个命题自身不是分析命题，因为我们从三角形这个概念中分析不出它们的内角和是 180 度。康德说："我们若给一位哲学家一个三角形的概念，并让他按照自己的方式去发现三角形的内角之和可能会与直角有什么关系。他现在只有在三条直线内所围成的一个图形的概念，以及在这个图形上的三个角的概念。现在，不论他对这个概念沉思多久，他也不会得出任何新的东西。他可以分解直线的概念，或是一个角的概念，或是'三'这个数的概念，并使之变得清晰，但不能想到在这个概念中根本没有的其他属性。"②

但是，对于逻辑实证主义来说，"三角形的内角和是 180 度"是一个分析命题吗？逻辑实证主义当然会给出肯定的回答，因为在他们眼中，所有的几何学命题都是分析命题。但这个"三角形内角和是 180 度"的命题并不是显然的分析命题，因为它毕竟不像"没有一个未婚的男子是已婚的"这个命题一样，仅靠自身符号的定义就为真。我们把三角形的内角和定义成 180 度，然后我们说"三角形的内角和"是 180 度是一个分析命题，但这将是苍白无用的，因为它缺少任何语义的(在任何语言中的)根据，如果如此，那么我们同样可以把三角形的内角和定义成 150 度和 210 度什么的，然后说"三角形的内角和是 150 度或者 210 度"是分析命题。孤立地，没有任何根据地对每个命题所包含的符号下定义，并不能构造出人

① [奥]克拉夫特．维也纳学派．李步楼，陈维杭，译．北京：商务印书馆，1998：28.

② [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A716/ B744- A717/ B745。

类已经拥有的，并且被我们称之为“数学”的东西，所以，对于逻辑实证主义来说，这条路显然是行不通的。但是，逻辑实证主义可以这样来改写这个命题：如果一个形状是三角形，并且它处于欧氏空间，那么它的内角和是 180 度；而欧氏空间我们可以用“清楚”的定义给出。

所以，逻辑实证主义认为：在这里，人们可以从“如果……”推导出“那么……”，并且在这里人们也没有援引任何实际存在的经验性的东西，因此“三角形的内角和是 180 度”是一个分析命题。①

但是，如果允许人们这样做，康德也会说，在这种意义上，“三角形的内角和是 180 度”是一个分析命题(见以上对康德的引用)。不过，康德依然会说，这个几何学的分析命题是建立在其他综合命题的基础上的，如果没有无穷后退的话，总是存在一个或几个命题，它(们)不是依靠自身符号的定义而真，因此它们不是彻底的分析命题。

我们可以从希尔伯特的公理化几何学出发，来阐明康德和逻辑实证主义的区别。在希尔伯特的公理化的几何学中，公理中的符号(初始概念)往往是不定义的，因为理由如前：如果公理中不允许不定义的概念存在，那么将导致无穷后退。在公理化的几何中，人们只是理想化地设定这些符号(初始元)处于如此这般的关系之中。为了清楚起见，我们可以看一下希尔伯特给欧几里得几何制订的公理集中的平行公理：“设 a 是一条直线，A 不是 a 上的一点。那么在 a 和 A 所在的平面上，最多只有一条经过 A 并与 a 不相交的直线。”②在这条公理中，按照希尔伯特的观点，点线面是不定义的初

---

① 参见赖欣巴哈对分析命题的理解。[德]赖欣巴哈．科学哲学的兴起．伯尼，译．北京：商务印书馆，2004：111.

② 参见：[美]克莱因 M. 古今数学思想．第四册．邓东皋，等，译．上海：上海科学技术出版社，2002：83.

始概念，所以严格地来讲，它不是逻辑实证主义上的分析命题，因为我们无法作符号的定义分析，这些符号本身是没有定义的。它也不具有逻辑实证主义认为的分析命题的必然性和普遍有效性，因为我们也可以理想化地设定这些符号处于其他的关系状态中，而这种符号间关系的重新设定并不总是必然地意味着矛盾。比方说，我们可以把平行公理改成"设 a 是一条直线，A 不是 a 上的一点。那么在 a 和 A 所在的平面上，有无数条经过 A 并与 a 不相交的直线。"单单看这条公理本身，很显然，我们发现不了任何必然的矛盾；如果它和其他公理协同起来作用，现代几何向我们表明，它们也不会必然地导致矛盾。当然，从必然性和普遍有效性的角度上讲，我们也可以用以上的论据来反对康德的"几何命题是先天综合命题"的观点，因为康德认为，先天综合命题是必然的和普遍有效的。关于这一点我们以后还要详细讨论。

从以上的例子我们可以清楚地看出，公理化的几何学并不支持逻辑实证主义的观点，因为几何学的公理并不总是"自身分析地"真着。如果逻辑实证主义辩论说，在一个系统内部，定理可以从公理逻辑地导出，所以这些定理是分析命题，那么，这样的论点对康德的观点并不能构成真正意义上的反驳，因为康德完全会同意，在这种意义上，这些定理可以被称为是分析命题；此外，逻辑实证主义还面临着其他的问题，即：从现代数学的角度来看，这种"如果，那么"的分析性不可能在任何时候都能保证自己的真正的分析性，因为它总要受到"一致性"的制约。如果系统是不一致的，分析性当然无从说起。关于"一致性"问题，我们以后还有很多涉及，这里就不详细展开了。

看来，如果逻辑实证主义要坚持数学命题是分析命题的观点，并且还要保持和康德的真正的差别的话，那么，他们必须断言数学的(所有)公理自身就是分析的，是重言式的命题，并且公理最好只有一个，因为如果公理有好几个，鉴于每条公理的独立性，那么我们很难说它们之间的关系是分析的；也许，有人会在这里指责我

有意误解，不过，我在这里想指出的是：在人们建造一个公理系统时，选择哪些命题作公理，或者不选择哪些命题作公理并不是一个“纯粹”分析的事情，即使系统中的每一个公理都是重言式命题。另外，如果一个公理系统是不一致的，那么从分析命题是必然正确的命题的角度来看，依赖于该公理系统的定理就很难说成是分析的。基于我们以上对几何学命题的扼要的分析，去断言所有数学命题都是分析命题将是很少有希望的。路还是有的，因为我们以上的讨论并没有涉及算术，如果说几何能还原成算术，而算术从一开始就是分析的，算术的所有命题都是重言式的命题，那么，逻辑实证主义就可以坚定地声称：“数学命题是分析命题。”

四、分析命题的种类

在转向下一节以前，让我们再更多地关注一下分析命题。在命题逻辑中$(P \vee \neg P)$是重言式，不论P取什么值，$(P \vee \neg P)$的值都为真，当然，具有这样形式的命题都是分析命题。我们可以使用真值表清楚地看到这样一点。现在，结合普通语言，我们来看下面几个命题：

(1)“或者有单身汉是黑皮肤的，或者没有单身汉是黑皮肤的。”

(2)“或者有单身汉的体重是两米，或者没有单身汉的体重是两米。”

(3)“在一个平面上，直线a要么经过点A，要么不经过点A。”

从形式上讲，这三个命题都是分析命题，按照逻辑实证主义的观点，它们的“真”都是不依赖于经验的，但是，我们显然觉得命题(1)和命题(3)是不一样的，命题(2)很别扭，如果说命题(2)是分析命题，它和经验无关地“真”着，那么，我们凭什么说它让人不舒服呢？如果说命题(2)从根本上讲就是一个错误的命题，我们判断这个命题对错的标准又从何而来呢？这个标准很难来源于形式

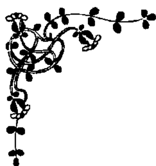
本身。这“不舒服”的标准和“对错”的标准都是从经验来的吗？如果我们足够地老实，仿佛我们是要承认这些标准是来源于经验的。

我认为，认识到这三个命题之间的差异是有意义的。命题(1)和命题(2)里面都包含有经验性的概念，比方说“单身汉”、“黑皮肤”、“体重”，等等；而命题(3)里并不包含这样的经验性概念，“点、线、面”要么像康德理解的那样是“直观”，或者说是可以找到“纯粹直观”的概念；要么像现代数学理解的那样，是不定义的概念。

鉴于此，我认为以下的建议并不是完全没有道理的。我们可以把分析命题划分为先天分析命题和经验分析命题。按照康德的理论，这种区分也是合适的。先天分析命题的意思是说，在这些分析命题里不存在经验性的对象和概念，用康德式的话说，它们是纯粹的(“但先天知识中那些完全没有掺杂任何经验性的东西的知识则是纯粹的”①)。经验分析命题的意思是说，命题本身的真假虽然可以不受经验检验(比方说命题(1))，但命题里却包含着经验性的对象和概念。对于命题(2)，它从形式上讲虽然是分析命题，但是，运用一些非形式的直观或者经验，我们就可以判断出它包含有“混淆概念”(或者说“范畴混淆”)的错误。也许有人想用彻底形式化的方法解决像命题(2)这样的困难，我认为，这样做能够成功的前提是：整个语言系统是封闭的，并且我们能够对所有的概念词汇进行分类，编号，确定哪些连接是合法的，等等(不过，做这个工作的时候肯定要借助经验)。如果说这样的工作能够完成，我们就可以形式地判定哪些重言式的命题包含着概念性的错误。如果说，语言系统是不封闭的，唯一的成功的可能是概念的产生是有规律的(或者用数学的话来说是递归的)，也就是说，我们可以形式地判定所有新概念的所有可能合法的连接，但是，对自然语言来说，这是不可能的。

---

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B3.

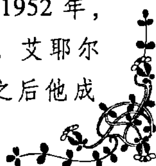


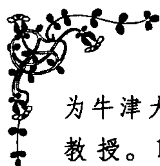
插录
艾耶尔小传



艾耶尔（Alfred Jules Ayer），于1910年10月29日在伦敦出生，英国哲学家。他的主要贡献是逻辑实证主义在英语国家的传播。艾耶尔的父亲出生于瑞士，他的母亲出生于荷兰的一个犹太人家庭。1929年，19岁的艾耶尔在牛津基督教堂学院（Christ Church，Oxford）学习。1932年，22岁的艾耶尔和莉斯（Renee Lees）结婚，并于同年和莉斯一起在自由学期期间去了维也纳，在那里艾耶尔和维也纳小组建立起了联系。和维也纳小组的联系对艾耶尔的一生产生了重要的影响。

1933年，艾耶尔回到牛津就开始宣讲维特根斯坦和卡尔纳普的学说，并开始撰写他的第一部主要著作《语言、真理和逻辑》，该书于1936年出版。在第二次世界大战期间，艾耶尔曾在英国军队服役，由于他的德语很好，艾耶尔被派到英国军队的特别行动执行小组（Special Operations Executive）审讯战俘。在此期间，艾耶尔也没有忘记学术，1940年他出版了他的第二部重要著作《经验知识的基础》。战后从1946年到1959年，艾耶尔成为伦敦大学一个下属学院的精神哲学和逻辑学的教授。1952年，42岁的艾耶尔成为英国科学院的成员。1956年，艾耶尔发表了其另外一部重要的著作《知识的问题》，之后他成





为牛津大学新学院(New College der Universität Oxford)的教授。1960年，50岁的艾耶尔和夏普曼(Alberta Chapman)结婚。1970年，艾耶尔由于自己的贡献被封成贵族。在英国，艾耶尔一般被看成是罗素的后继者。但艾耶尔的名声更多是通过传播别人的思想获得的。艾耶尔自己的原创思想并不多。艾耶尔在一生中有很多时间在美国讲学，他也是很多大学的荣誉博士。

业余时间艾耶尔喜欢打板球，花很多时间为英国工党效力。他宣扬人道主义，为同性恋的合法权益呼吁，称自己是无神论者。1978年，68岁的艾耶尔退休，但是他与大学仍保持着联系。艾耶尔和自己的第二位太太夏普曼生了一个孩子，但在1981年他和夏普曼离婚了，和劳森(Vanessa Lawson)结了婚。劳森在1985年死去。艾耶尔在自己死前又和夏普曼复了婚。1989年6月27日艾耶尔去世。



第二节　康德与弗雷格

在数学哲学上，弗雷格为“算术命题的分析性”做了很多的工作，但在我们正式地讨论算术命题是否分析的之前，先来看一下弗雷格的一些基本观点，以及他与逻辑实证主义、康德的关系。

一、弗雷格与逻辑实证主义

在对待数学上，弗雷格是一个逻辑主义者，但重要的是，他也是一个柏拉图主义者，记住这一点，对理解弗雷格很重要。很遗憾，这一点往往被现今的研究者忘记。在《数学中的逻辑》一文中，

弗雷格说："数学比其他科学与逻辑的联系更密切；因为数学的全部活动几乎都是进行推理。……除了推理活动外，下定义也属于数学活动。……进行推理和下定义要服从逻辑规律。由此可见，逻辑对于数学比对于其他学科具有更重要的意义。"①从这里我们可以清楚地看到，弗雷格的逻辑主义倾向是显然的。在同一篇文章里，弗雷格继续写道："……一种独特的数学推理方式也必须服从一条规律。而且，如果这条规律不是逻辑的，则将是数学的；它将可以和这门科学的定理和公理排列在一起。"②可见，弗雷格虽然认为，数学和逻辑的关系密切，但是他并不认为数学和逻辑是一回事，他认为数学这门科学有自己独特的公理和定理。推理需要逻辑的规律，但是推理的前提并不是逻辑的规律。弗雷格说："不能容忍将前提与进行推理的纯逻辑规律混淆起来；因为这会使推理丧失逻辑纯洁性，而且由于这种混淆不清，就不会将前提清晰地区别开。但是，如果不能清晰地认识前提，就不能可靠地回溯至原始真命题，而没有原始真命题就不能建立系统。"③弗雷格这里所讲的原始真命题指的就是公理和公设，所以，弗雷格认为一个数学系统的建立需要数学公理，他说："公理是和定理一样的真命题，但是它们是在我们系统中没有被证明而且也不需要证明的真命题。"④

从以上的引述我们可以看出，逻辑实证主义并不能在弗雷格那里找到很多的支持，因为弗雷格并没有强调说一个数学系统的公理

---

① [德]弗雷格 G. 弗雷格哲学论著选集．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2006：249.

② [德]弗雷格 G. 弗雷格哲学论著选集．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2006：249.

③ [德]弗雷格 G. 弗雷格哲学论著选集．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2006：252.

④ [德]弗雷格 G. 弗雷格哲学论著选集．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2006：252.

是凭借符号的定义而真的分析命题，况且弗雷格也不可能这样说。弗雷格是一个柏拉图主义者，对于柏拉图主义者来说，一个数学系统的公理的真并不需要公理自身是分析命题来保证。在弗雷格看来，数学所处理的不是依赖于语言的句子，数学的对象是“思想”。这与前期的维特根斯坦看待数学的方式是截然不同的，因为维特根斯坦说过：“数学是一种逻辑方法。数学命题是等式，因此都是伪命题。数学命题不表达思想。”①

我们再引用弗雷格的一段话，从这一段话中我们可以清楚地看到弗雷格的柏拉图主义的观点，而逻辑实证主义是不愿意看到用柏拉图主义来处理数学的；弗雷格的这段话也表达了他的反约定主义的观点，而很多逻辑实证主义者们却恰好认为数学是“因约定而真”的。关于约定主义，我们以后还会有所涉及，在这里就不再展开。

“思想不是感官可感觉的；但是我们将句子作为它的一种可听见或可看见的代表，因此我们不说‘原理’而说‘定理’，不说‘准则’而说‘公理’。并且以定理和公理指称真的思想。但是由此也说明，思想不是主体的东西，不是我们心灵活动的创造物；因为我们从毕达哥拉斯定理得到的思想对于所有人都是相同的，它的真完全不依赖于这个人或那个人考虑它还是不考虑它，不应该将思想行为看做创造思想，而应看做理解思想。”②

所以在弗雷格看来，数学是完全不能还原成仅仅是以符号的定义就为真的东西，可以这样说，弗雷格和那些认为数学命题是分析命题，而分析命题又是仅仅以符号的定义就为真的命题的逻辑实证主义者们是针锋相对的。弗雷格在《数学中的逻辑》一文中清楚地

---

① ［奥］维特根斯坦．逻辑哲学论．贺邵甲，译．北京：商务印书馆，2005：95.

② ［德］弗雷格 G. 弗雷格哲学论著选集．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2006：254.

断言："定义对于系统并非是完全必要的。"①而在逻辑实证主义那里，定义就是一切。面对数学，逻辑实证主义看到的是"句子"，要证明的是"句子"，而弗雷格看到的则是"思想"，要证明的是"思想"。弗雷格对于这个本质的区分有着十分清醒的认识，他说："……如果假定句子是被证明的东西，那么定义可能至关重要，但是要将思想看做要被证明的东西，那么定义就不重要。"②

以上我们指出了弗雷格和逻辑实证主义的本质的不同。但并没有说，用弗雷格的观点我们就可以驳倒逻辑实证主义。弗雷格的数学系统的公理"柏拉图主义地"真着，不仅是对于逻辑实证主义，就是对于一般诚实思考的人来说，也不是那么容易接受的。按照弗雷格，"思想"不是感官可感受的，那么在逻辑实证主义看来，它就没有任何实证的可能，它的"真"又从何而来？在逻辑实证主义看来，命题的"真"如果不来源于经验，命题自身就必须依靠自身符号的定义分析地真着。柏拉图主义，在逻辑实证主义看来，就是一种神秘主义，我们并不知道如何可以和它正常地打交道。在一个系统里，如果我们不能用纯粹分析的手段或者经验实证的手段来确定命题的真，我们凭什么说，一个数学系统的公理就可以不加证明地真着？

二、弗雷格与康德

逻辑实证主义对柏拉图主义数学观的拒斥也是很有道理的，如果说我们不去跟从逻辑实证主义，如果我们认为逻辑实证主义的数学观确实有其狭隘的地方(就像我们对几何公理的分析所指出的那样)，同时又认为柏拉图主义的数学观确实有其神秘的地方，那么

① ［德］弗雷格 G. 弗雷格哲学论著选集．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2006：255.

② ［德］弗雷格 G. 弗雷格哲学论著选集．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2006：257.

康德的先天综合判断确实是一个不错的选择，虽然它还需要进一步的辩护。在这里，我们先不展开详细的讨论。可以先看一下弗雷格本人对“先天综合命题”这个问题的处理。弗雷格认为几何学的真命题是先天综合命题，而算术的命题却是分析命题。在这里我们先引用弗雷格在《算术基础》的结论中的一段话，来看一下弗雷格对康德的数学观的态度。在弗雷格对康德的算术观点作了细致的批判以后，他这样写道：“为了不使人责怪我对一位我们只能满怀钦佩、衷心景仰的思想巨匠有些吹毛求疵，我认为必须也强调我和他一致的地方，而且这些远远超过不一致的地方。如果仅仅提及首要的地方，我认为康德的伟大功绩在于他区别出综合判断和分析判断。他称几何学真命题为综合的和先验的，以此他揭示了它们的真正本质。而且现在仍然值得重复这一点，因为人们还常常认识不到它。如果说，康德在算术方面搞错了，那么我认为，从根本上说这无损于他的功绩。在他看来，重要的是存在着先验综合判断；至于它们是只在几何中还是也在算术中出现，则不太重要。”①

读过《算术基础》的人，肯定会注意到以上引用的这样一段话。在不同人那里，我想，会有着很不同的反响。这一段话出现在《算术基础》一书快要结束的地方，并且是在对康德的算术观点进行了认真、细致地批判之后，所以很容易让人有这样的感觉，这里所表达的不是弗雷格严肃的学术观点，而是学术外的、表达对前辈尊敬的策略性的话语。不过，我倒情愿对这段话进行更加字面的理解，因为从弗雷格的柏拉图主义数学观出发，认为几何学的真命题是先天综合命题，并不需要太遥远的路途，通过详细地分析，我们就会发现，康德的先天综合判断也确实可以对“柏拉图主义数学观的去神秘化”作出一定的贡献。所以，我认为，在几何学领域里，弗雷

① ［德］弗雷格 G. 算术基础．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2005：107.

格还是真心欢迎康德的数学观的。不过，历史是有趣的，而正是弗雷格及后来的罗素等人把算术命题理解成分析命题的努力，以及由这些努力所产生的结果使逻辑实证主义有可能为自己的观点提供强有力的辩护：数学命题是分析命题。

三、几何学的算术化和分析地定义自然数

把几何学算术化的关键步骤是解析几何，正是通过解析几何，数学家们可以把几何图形的点和算术中的数一一对应起来。解析几何是由笛卡儿和费马发明的，这确实是数学上最伟大的发明之一。用解析几何可以把几何算术化，这已经被数学家普遍接受，暂且也让我们认为这是毫无疑问的，将来，我们还将对这一点提出一些疑问，虽然是以主流数学家不以为然的方式。

如果说欧氏几何和非欧几何可以通过解析几何还原成实数的算术，实数最终可以通过自然数建立起来，那么，只要我们能建立自然数的分析性，理论上我们就可以最终建立数学的分析性，这样，逻辑实证主义的目标就可以得以完成，康德的数学命题是先天综合命题的观点就会遭到强有力的反驳。

很多数学家和数理逻辑学家都认为，纯粹数学是可以还原成关于自然数的命题的。我们看一看罗素(Bertrand Russell，1872—1970)的观点就足以说明这种状况。罗素在《数理哲学导论》中说："所有传统的纯粹数学，包括解析几何在内，全可以看做是有关自然数的命题所组成。这也就是说，其中的概念可以用自然数来定义，其中的命题可从自然数的性质推演出来——当然，在每种情形下，还得加上一些纯逻辑的概念和命题。"①

当然，要达到这样的要求，我们得知道如何从自然数分析地

① [英]罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003：9.

定义实数。虽然其他的数学工作者在细节上和罗素的看法不尽相同，但他们也都普遍认为，实数可以用有理数(分数)来定义，比方说，一个实数被定义为一个分数的类，或者定义为一种分数的性质。有理数(分数)则可通过有序数偶的方式用整数来定义，整数又可以通过数偶的方式用自然数来定义。所以说，如果要保证数学的分析性质，我们就首先得保证自然数是“分析地”定义出来的。

由此看来，一切的关键在于如何“分析地”定义自然数，而自然数怎么“分析地”定义呢？为了对整个问题有一个更好的理解，我们来简略地看一下弗雷格的方案。

对于弗雷格的“自然数的方案”来说，重要的是给概念赋予一个数，但是为了获得“数”，人们必须确定数相等的意义。怎么确定数相等呢？是通过数数吗？不是这样的，因为数数预先设定了我们知道什么是数，这样是不行的，就像弗雷格所说，这样是在兜圈子。

如果我们有概念 F 和 G，并且处于 F 这个概念之下的对象和处于 G 这个概念之下的对象是一一对应的，那么我们就说：“F 这个概念和 G 这个概念是等数的”。对此，人们没必要事先懂得数数，就像弗雷格自己举的例子，如果一个饭店服务员想确信他在桌子上摆放的餐刀是否与盘子一样多，那么他既不必数餐刀，也不必数盘子，他只要在每一个盘子的右边摆放一把餐刀，看看餐刀和盘子是否一一对应就行了。通过检验概念下的对象是否形成一一对应的关系，就可以把概念分成不同的等价类，这样每个概念就都能够获得(唯一)一个属于自己的数，处于相同等价类的概念是等数的，处于不同等价类的概念是不等数的。

自相矛盾的概念是属于一个等价类的，因为在自相矛盾的概念之下不可能有任何对象存在，并且每一个等价类的概念的“数”是唯一的(所以人们可以用定冠词，说这个概念的这个数)，它们不可能与另外等价类的概念等数，所以我们可以把“0”赋予这个等价

类的概念，其实它也可以不叫“0”，但我们一定要知道它是处于这样一个等价类的概念的这个“数”。用弗雷格的话说就是：0是适合“与自身不相等”这个概念的这个数。①

可能还存在一些概念，它们并不自相矛盾，但在它们之下也是没有对象的。如果有这样的概念，那么它们和自相矛盾的概念属于一个等价类，照理也是可以用来定义0的，但是弗雷格有自己的考虑，他说：“我本可以用没有东西处于其下的别的概念来定义0，但是对我来说，重要的是选择这样一个概念，关于它能够用纯逻辑方法证明这一点；而‘与自身不相等’这个概念最适合这一目的……”②

然后弗雷格选择了一个特殊的“与自身不相等”的概念“与0相等但不与0相等”，用它来定义0：属于“与0相等但不与0相等”这个概念的这个数是0。③“与0相等但不与0相等”是一个自相矛盾的概念，它和所有其他的自相矛盾的概念属于一个等价类，当然这个概念的这个数是0。然后弗雷格在0的基础上定义了1。1是属于“与0相等”这个概念的这个数。④

在弗雷格那里，人们必须要知道的还有：“在自然数序列中的紧跟”，他说：“存在一个概念 F 和处于它之下的这样一个对象 x，使得属于 F 这个概念的数是 n，而属于处于 F 之下但不等于 x 这个概念的数是 m 这个句子与 n 在自然数序列中紧跟 m 这个句子具有

① ［德］弗雷格 G. 算术基础．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2005：92.

② ［德］弗雷格 G. 算术基础．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2005：94.

③ ［德］弗雷格 G. 算术基础．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2005：96.

④ ［德］弗雷格 G. 算术基础．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2005：96.

相同的意味。"①

这样我们就知道：1 在自然序列中紧跟 0。

通过这种方式，弗雷格就可以定义所有的自然数，因为：$n+1$ 是"属于以 n 结束的自然数序列的项"这个概念的这个数。②

弗雷格就这样分析地定义了自然数，并且他认为，算术定律是分析判断，即分析命题。在《算术基础》一书的结论中，弗雷格批评了康德对"分析判断"的理解："康德显然低估了分析判断的价值——大概是由于过分狭窄地确定这个概念——尽管他似乎想到了这里使用的这种较宽的概念。如果以他的定义为基础，那么分析判断和综合判断的划分就不是穷尽的。……康德似乎认为概念是通过指定的标志确定的；但是这是最不富有成果的概念构造。……富有成果的概念划出以前还根本没有给定的界限。从它们可以推出什么，无法从一开始就认识到；这里，人们不是简单地从箱中把刚刚放入的东西又取出来。这些结论扩展了我们的认识，因此人们应该遵循康德把它们看成是综合的；然而它们可以被纯逻辑地证明，因而它们是分析的。实际上它们包含在定义之中。……人们常常需要许多定义来证明一个句子，因此这个句子不包含在任何个别的定义中，然而却是从所有定义中纯逻辑地得出的。"③

在这里，我们可以看到，弗雷格对康德的批评还是很有力量的，康德确实对分析概念的确定有些狭窄了，就像我们上文指出的那样，康德所理解的逻辑主要是主谓逻辑，所以他也是从主谓逻辑出发来理解分析命题的，而丰富的关系逻辑在康德那里并没有得到

① [德]弗雷格 G. 算术基础．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2005：95.

② 参见：[德]弗雷格 G. 算术基础．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2005：97.

③ [德]弗雷格 G. 算术基础．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2005：106-107.

很好的照顾。但是弗雷格的富有成果的概念构造也隐藏着自身的问题，我们马上要讨论到它。但是到目前为止，我们必须看到，如果说弗雷格是正确的，也就是说算术是彻底分析性的，此外再根据大部分数学家的论断和信仰，即几何可以归约成算术，那么整个数学的分析性也就建立起来。看来，逻辑实证主义在反对数学命题是先天综合命题方面已经取得了决定性的胜利。

四、弗雷格的困境——罗素悖论

我们看到，在弗雷格分析地定义自然数的过程中，虽然他没有明确地使用“集合”这个词，但是为了能够给每个概念赋予一个“数”，他对“概念”的理解显然是集合论式的。集合论的“概括原则”在他给“数”下定义时起着关键的作用。而现在我们知道，无限制地运用“概括原则”来得到集合是会导致矛盾的。在这里我们简单地介绍一下罗素悖论。

我们知道，有些集合不是自身的元素，比方说人的集合是人类，而人类不再是人，因而不再是“人的集合”的元素；而有些集合是自身的元素，比方说集合的集合，集合的集合仍是一个集合，所以它是自身的元素。现在我们可以使用“概括原则”得到这样一个集合：所有不属于自身的集合的集合，简单地表示就是：用概括原则定义集合 $P=\{x: x$ 不属于 $x\}$。现在问集合 P 是否属于 P 自己？

如果 P 属于 P，由于 $P=\{x: x$ 不属于 $x\}$，那么 P 不属于 P；如果 P 不属于 P，由于 $P=\{x: x$ 不属于 $x\}$，那么 P 属于 P。无论如何，我们总是得到矛盾。这就是罗素悖论。

从以上对弗雷格方案的介绍我们可以看出，罗素悖论的来源是朴素集合论的概括原则。要想无矛盾地获得自然数，我们首先得改造朴素集合论。如果人们不能解决悖论，算术命题就不可能必真，那么算术的分析性也就无从说起。逻辑实证主义的断言“数学命题是分析命题”又变得疑问重重。

五、数学命题是重言式的分析命题——一个缺少根据的断言

我们首先简单地看一下逻辑派的创始人罗素和怀特海的解决悖论方案。①

罗素和怀特海(Alfred North Whitehead)(后文只说罗素)用的是"分支类型论"这种方案。但是，罗素并没有直接改造朴素集合论的概括原则，也就是说，限制概括原则的使用范围或者限定什么是合适的集合，因为罗素认为，悖论的真正根源在于非直谓定义。所谓的非直谓定义的意思是：借助于一个整体来定义一个概念，而这个概念本身又属于这一整体。我们可以看到，在这样的定义里有一种循环。罗素认为，正是这种循环导致了悖论的出现。于是，罗素提出了他的"恶性循环原则"：没有一个整体能包含一个只能借助于这个整体来定义的元素。基于这一原则罗素建立了他的分支类型论。

首先，根据"恶性循环原则"，罗素认为人们不能混淆类型：如果论域里的元素都是单个的东西，那么适用于这些元素的命题函数(它可以理解成元素的性质)就被定义成层次为 1 的类，比方说，$f(a)$和$g(b)$中的f和g，其中a,b是单个的对象，单个的对象是属于层次为 0 的类。如果一个论域里的元素本身就是单个对象的命题函数(性质)，那么适用于这些元素的命题函数就被定义成层次为 2 的类，比方说$F(g)$和$G(f)$中的F和G，其中f和g是层次为 1 的命题函数，依此类推。类的划分的基本原则就是：每一命题函数都必须从属于一个确定的类，人们不能混淆这些类型。这样，根据上面的标记法，$a(b)$，$f(G)$和$G(a)$就是无意义的。很清楚，$f(f)$

① 以下的引述主要参见：徐利治．数学方法论十二讲．大连：大连理工大学出版社，2007：141-207；以及鲁道夫·卡尔纳普．数学的逻辑主义基础．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：47-60.

和$-f(f)$这样的表达都是无意义的，也就是说我们不能有意义地说一个性质属于它本身或者不属于它本身，于是罗素悖论就可以得以消除。

其次，由于罗素的“恶性循环原则”是直接建基于“反对非直谓定义”的，所以，他又在每一个类里，根据“下定义方式的不同”在类中分级(order)。在同一个类中，那些在定义中没有涉及“所有的性质”的性质是1级的；那些在定义中涉及了“所有第一级的性质”的性质属于第2级；更一般地，在定义时，涉及第n级的“所有的性质”的性质是第$n+1$级的。但是，由于在不具体地指明确定的级的情况下，涉及“所有的性质”的表达式是无意义的。不过，这样一来就带来一个困难，因为“对所有的实数”这样的表达式就不能不加限制地指所有实数，进而，无限制地涉及“所有实数”的定义和语句就是不允许的，这样，许多在实数理论中重要的基本定理不仅不能证明，而且不能表达。

为了克服这样的困难，罗素引进了可归约性公理(axiom of reducibility)。但是，可归约性公理，就像它的批评者指出的那样，并不是逻辑本身所必需的。卡尔纳普(Carnap)在《数学的逻辑主义基础》这样写道：“为了克服这一困难，① 罗素不得不使用蛮横(brute)的方法，那就是引入可归约性公理，借此能把一个类型中的不同的阶②在某些方面归约为该类型中最低的阶。”③

维特根斯坦在《逻辑哲学论》中也批评了罗素的可归约性公理：“逻辑的普遍有效性同‘凡人皆有死’这类命题的偶然的普遍有效性相对比，可以称为本质的普遍有效性。如罗素的‘可归约性公理’

① 指实数理论方面基本定理的表达和证明的困难。

② 指我们前面所说的级。

③ 鲁道夫·卡尔纳普．数学的逻辑主义基础．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：53.

这类命题不是逻辑命题，这就说明了我们这种感觉：即使这些命题为真，也只能是一件碰巧的偶然的事情。可能设想一个世界，其中可归约性公理是无效的。因此很清楚，我们的世界实际上是否也像这样的，这个问题同逻辑毫无关系。"①

现在，我们稍微看一个比较具体一些的例子。根据罗素的"恶性循环原则"，很多经典数学中非常有用的"非直谓定义"都将被驱逐出数学，比方说"上确界存在"定理。这个定理是说：对任意一个有界实数集，都存在一个确定的最小上界。但什么是最小上界呢？最小上界就是上界集合中那个最小的实数，而这个定义显然是一个非直谓定义。如果说根据"恶性循环原则"排除"上确界定理"，那么数学分析中很重要的"中值定理"就得不到证明；如果没有了"中值定理"，那么数学分析中一大批定理都将得不到证明。

另外，一些数学定理的推导和证明除了需要逻辑公理以外，还需要无限公理和选择公理。但是这两个公理都是存在性语句，因而不能是逻辑公理，因为逻辑只处理可能的实体，而不能对事物的存在与否作出断言。这样一来，数学可以化归为逻辑的观点就很难成立。罗素并没有忽视这个问题，他把一个证明中需要用到无限公理和选择公理的数学语句(比方说 S)变换成一个条件语句，例如：如果无限公理成立，那么 S 成立。这样，数学又可以归约为逻辑了。但是，问题并没有这么简单，因为如果无限公理导致矛盾，那么以无限公理为假设的定理就说不上是什么数学定理。对无限公理的使用并不能简单地归结为逻辑的"如果，那么"。无限公理在系统中的一致性是需要证明的，其实这也是希尔伯特证明论的主要任

① ［奥］维特根斯坦．逻辑哲学论．贺绍甲，译．北京：商务印书馆，2005：92.

务。① 如果说无限公理的一致性得不到证明，那么数学化归为逻辑的观点就很难站得住脚。

我们稍微总结一下以上的问题：为了能够单纯依靠逻辑，从而纯分析地定义自然数，弗雷格自觉或不自觉地利用了朴素集合论。但是在朴素集合论那里，由于人们对于什么是合适的集合，什么是合适的“概括原则”没有限定，而面临着矛盾。为了解决矛盾，罗素以“恶性循环原则”为出发点，用分支类型论改造了朴素集合论。但是分支类型论又在实数理论方面带来许多难以克服的困难。对这些困难之克服的寻求又迫使罗素引进可归约性公理，而可归约性公理，就像罗素的批评者所指出的那样，并不是逻辑本身所必需的。此外，考虑到无穷公理和选择公理给逻辑主义带来的困难，数学化归为逻辑的观点是很难成立的，所以数学命题也很难是单纯依靠逻辑的重言式的分析命题。

后来罗素的学生拉姆赛(Ramsey)简化了分支类型论，不再在类中分级，建立了自己的简单类型论。这样他就可以保留数学中有用的非直谓定义。但是，拉姆赛本人并不是一个彻底的逻辑主义者，他有柏拉图主义倾向，因为他认为：性质的总体在用定义刻画它们的特征之前早已存在，而非直谓定义只是一种加以鉴别的方法。② 而正是基于这样一种柏拉图主义的哲学观点，拉姆赛才有权利认为，有些非直谓定义是无害的。

当然，对悖论的解决不只是“类型论”这样的方案，还存在着其他的一些方案，比方说比较常见的策梅洛(Ernst Zermelo)公理系统，它主要是(但并不仅仅是)通过“分离公理”来限制概括原

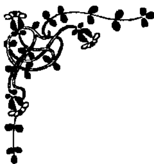
① 参见下一节。

② 参见：鲁道夫·卡尔纳普．数学的逻辑主义基础．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：57.

则，从而限定了什么是合适的集合(分离公理的一个推论是：任一集合 M 必有一子集不是 M 的元素，据此人们可以区分集合和类)，进而达到消除悖论的目的。关于这一点，我们就不详细介绍了。

现代集合论在避免已知悖论方面已经是成功了的。不过，这并不意味着逻辑实证主义就可以借此达到自己的目标，相反，它更清楚地显示了逻辑实证主义的问题，因为能够避免已知悖论的现代集合论都是公理集合论，即使整个数学都能够毫无问题地还原成公理集合论(这一点也并不是毫无问题的)，我们也不能马上断言数学命题就是依靠定义而真的、重言式的分析命题，因为现代集合论的公理中都包含不被精确定义的初始概念，比方说“集合”这个概念本身。这样就又回到了我们讨论几何公理时的情况，逻辑实证主义还是不能宣称数学命题是因定义而重言地真着。也许有人会说，这些公理是一些隐定义，虽然人们不能一下子全部看清它们的所有的语义蕴涵，不过，这正是隐定义富有成果的地方，所以我们还是可以说：所有的数学命题都是分析命题。诚然，公理能对于出现在其中的初始元(概念)进行某种程度的限制，但是，就像现代逻辑所指出的那样，一组公理却不等同于一组定义，因为一组定义可以在词的严格的意义上以唯一的方式确定着被定义项的意义；而公理集却并不能保证这一点。此外，公理系统是有可能不一致的，如果公理系统是不一致的，那么具有普遍和必然性的分析性当然无从说起；如果说公理系统是一致的，那么它也有可能接受不同的解释(模型)，用现代逻辑的话说，一个公理系统如果有模型，那么它可能有许多不同的模型，并且，这些模型不仅仅是内容的不同，还可以本质上是不同构的。而对于我们在这里所关心的，与数学有关的公理集合论来说，情况就是如此。公理集合论单凭自身并不能固定住唯一的“预期解释”。在这里，我们就不作更详细的解释了，对此想了解更多的读者可以阅读一下现代逻辑学中的罗文海姆-司

寇伦(Löwenheim-Skolem)定理。[①] 如果说公理并不能理解成隐定义，并且对其存在不同构的解释，那么即使是在“公理系统是一致的”假设下，断言“数学命题是以定义而真的重言式命题”也是没有很好的根据的。



插录

弗雷格小传



弗雷格(Friedrich Ludwig Gottlob Frege)，1848年11月8日生于波罗的海的沿岸小城维斯马尔(Wismar)，他是德国的逻辑学家、数学家和哲学家。弗雷格在逻辑领域的杰出贡献是：他是发展形式语言和形式化证明的第一人。据此，弗雷格为今天的计算机技术和信息技术创造了不可或缺的基础。在哲学领域，弗雷格的语言哲学影响也十分深远，他直接影响了罗素和维特根斯坦，因此弗雷格被认为是分析哲学的开路先锋之一。

弗雷格的父亲亚历山大·弗雷格(Alexander Frege)是数学教师，曾任维斯马尔高级女校的校长。弗雷格的母亲



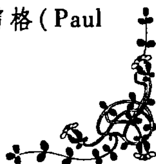
① 可参阅：陈慕泽，余俊伟．数理逻辑基础．北京：中国人民大学出版社，2003，或者[美]恩德滕．数理逻辑．沈复兴，等，译．北京：人民邮电出版社，2007.



奥古斯特·比亚罗布劳茨基(Auguste Bialloblotzky)的祖上可能是波兰人(从姓氏上也可以获得一点点信息)。弗雷格中学就读的是维斯马尔大城市文理科中学(das Gymnasium Große Stadtschule Wismar)。他的一个老师雷奥·萨克斯(Leo Sachse)对弗雷格有很深的影响，后来“雷奥·萨克斯”这个名字作为例子还曾经出现在弗雷格的著作中。1866年，弗雷格的父亲去世。1869年，21岁的弗雷格听从老师萨克斯的建议去耶拿大学学习。当时，在耶拿大学授课的有恩斯特·艾博(Ernst Abbe)以及哲学家库诺·费舍尔(Kuno Fischer)，前者对弗雷格的科研生涯提供了很大的帮助，后者的思想弗雷格曾经仔细钻研过，并给了弗雷格很大的影响。

1871年，23岁的弗雷格转到哥廷根大学，他在那里提交了自己的博士论文《论在平面上虚幻形象的几何表达》。然后，弗雷格又回到了耶拿，1874年，26岁的弗雷格在艾博那里以题为《建基在量的扩张之上的计算方法》的论文获得了教授资格。于是，他在耶拿大学做了私人讲师。1878年，弗雷格的母亲去世，次年，弗雷格被聘为副教授。

1887年，39岁的弗雷格和马格丽特·莉斯博格(Margarete Lieseberg)结婚，但是他们没有生育孩子，有的材料说生了两个孩子，但都早夭了。弗雷格夫妇收养了一个孩子，取名保尔·奥托·阿尔弗雷德·弗雷格(Paul Otto Alfred Frege)。





1896 年，48 岁的弗雷格被耶拿大学聘为教授，但是他很少受到学生和同事的重视，直到他 69 岁退休这种状况也没有得到改善。弗雷格唯一知名的学生是卡尔纳普（Rudolf Carnap）。正是由于卡尔纳普在很多方面对弗雷格著作的阐发，才使得弗雷格的著作闻名于世。弗雷格一直与诺贝尔文学奖获得者尤金（Rudolf Eucken）和罗素（Bertrand Russell）保有联系。

弗雷格的科研工作由于 1902 年罗素悖论的发现陷入了严重的危机之中。1903 年，弗雷格在《算术的基本法则》一书的后记中承认，罗素动摇了他的大厦的根基。

1904 年，弗雷格的夫人马格丽特·莉斯博格去世。在随后的几年中，弗雷格精神抑郁，因此也没有能够写出重要的作品。而在 1917 年弗雷格退休后，他慢慢地克服了自己的抑郁，重新开始撰文发表。1923 年，弗雷格抛弃了自己为之奋斗一生的逻辑主义，转而试图把数学建基在几何上，弗雷格认为几何学的命题是综合的，不是分析的。但弗雷格毕竟已经老了，至死他也没有阐发好自己的新思想。1925 年 7 月 26 日，弗雷格死于巴德·克莱嫩（Bad Kleinen），一个离他的故乡不远的小城。

在 1994 年出版的弗雷格的私人日记中，人们可以读到弗雷格的反民主的、反天主教的、反法国的以及反犹太人的思想。然而，在公开场合下，弗雷格从来没有参加过政治。



第三节　康德和希尔伯特

一、作为康德主义者的希尔伯特

逻辑实证主义想把数学还原成以定义而真的重言式命题的设想看来是很难实现的。在这里，我们就不再深入地讨论逻辑实证主义的努力和困境，我们现在把目光转向希尔伯特，来看一看他的数学思想，以及他和康德的关系。希尔伯特，20 世纪的一流数学家，被称为数学世界的亚历山大，在代数学、代数不变式、几何基础以及积分方程方面都取得了伟大的成就。

为了清楚地展示他和康德的关系，我们首先看一下希尔伯特在《论无限》中的一段话："当我们把实质逻辑的演绎应用于真实的事物或事件时，它是不是以某种方式把我们欺骗了或者把我们置于困境？不！实质逻辑演绎是必不可少的。只有当我们作出任意的抽象定义，特别是那些包含无限多对象的抽象定义时，我们才被欺骗。在这些情况下，我们是不合法地用了实质逻辑演绎；也就是说，我们没有充分注意到那些为这种演绎的有效应用所必需的先决条件。……作为应用逻辑演绎和实现逻辑运算的一个进一步的先决条件，在概念形成中必须有一些东西，即某些在一切思维之前作为直接经历的事物被直觉到的逻辑以外的具体对象。"①

康德在《纯粹理性批判》中对"逻辑的超验运用"也曾经清楚地表达了自己的反对，他说："……既然这种逻辑真正说来只应是对经验性使用加以评判的一种法规，那么如果我们承认它是一种普遍地和无限制地使用的工具，并胆敢单凭纯粹知性去对一般对象综合

① 大卫·希尔伯特. 论无限. //[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南. 数学哲学. 朱水林，等，译. 北京：商务印书馆，2003：220.

地下判断、提看法和作裁决，那就是对它的误用”。虽然，康德在这里指的是先验逻辑，但是对于康德来说，它对于“形式逻辑”来说也是恰当的，就像邓晓芒教授所指出的那样：“形式逻辑不过是附属于范畴之上的形式而已，所以它虽然是‘普遍逻辑’，可以运用于一切(经验的和非经验的)对象之上，但唯有借助于范畴(借助于先验逻辑)而运用于经验知识之上才是它的本分。”①

比较康德和希尔伯特的“如何运用逻辑的”观点，我们可以清楚地看到，希尔伯特完全赞同康德的观点，因为他们都不同意对逻辑进行无限制的运用。具体到数学上，用希尔伯特自己的话说，就是：“在认识到存在着这些必须考虑的先决条件时，我们发现自己是和哲学家相一致的，尤其是和康德相一致的。康德教导我们——而且这是他学说的主要部分——数学处理的题材是与逻辑无关地被给定的。因此数学绝不能单靠逻辑建立起来。由此可知，弗雷格和戴德金如此建立数学的企图是注定要失败的。”

在这里，我们并不去讨论“数学处理的题材”是不是康德学说的主要部分，以及希尔伯特对弗雷格的指责是不是完全切中实际，我们首先要清楚的是希尔伯特的这样一种和康德一致的观点：数学不能还原成逻辑，数学有其逻辑以外的对象(直观内容)，以及抽象的逻辑运用在超出可能经验对象范围的运用中可能会导致错误。

此外，根据康德的理论，我们不可以经验“无限”，因为我们的经验总是有限的，但是，“无限”这个概念可以作为理念来起作用。在以后的讨论里，我们将看到，康德认为，“纯直观空间”是无限的。但是对于康德来说，“纯直观空间”并不属于可能经验，它是可能经验的条件，人们并不能经验或者把握住什么无限的东西。所以，从康德的哲学出发，现代数学中的“实无穷集合”这样

---

① 邓晓芒．康德哲学诸问题．北京：生活·读书·新知三联书店，2006：10.

的“无限”只能作为“理念”出现。康德是这样来理解理念的：“我把理念理解为一个必然的理性概念，它在感官中是不能有任何与之重合的对象的。所以，我们现在所考虑的纯粹理性概念就是超验的概念。它们都是纯粹理性的概念……它们不是任意虚构的，而是由理性的本性自身出发的，因而是与全部知性运用必然相关的。最后，它们是超验的，是超出一切经验的界限的，所以在经验中永远不会有一个和先验理念相符合的对象出现。”①

如果说在经验中永远没有一个对象和理念相符合，那么理念是不是一个毫无用处的东西呢？康德也并不这样认为，他说：“现在，即使我们对先验的理性概念不得不说：它们只是些理念，但我们绝不是要把它们看做多余的和无意义的。……知性虽然不能借此比它按照其概念所能认识的更多地认识对象，但毕竟在这种认识中得到了更好、更进一步的指导。”②

希尔伯特也完全赞同康德的这一观点，他在《论无限》中说：“我们的主要结果是：无限在现实中的任何地方都找不到。……与弗雷格和戴德金以往的努力相反，我们认为要获得科学的知识，某些直觉的概念和洞察力是必要条件，单凭逻辑是不够的。以无限进行的运算只有通过有限性才能成为确定的。”③和康德一样，希尔伯特并不认为无限（作为理念）在数学中是一个无足轻重的东西，他说：“留给无限去起的作用只是一个观念的作用——如果我们依照康德的术语，把观念理解为一种理性概念，它超乎一切经验之外，而使具体事物得以完成为一个总体——而且是一个在由我们的理论

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B384/A328.

② [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A329/B386.

③ 大卫·希尔伯特．论无限．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：231.

所建立的框架内，我们可以毫不迟疑地予以信任的观念的作用。"①

所以，我们说，在对待数学上，希尔伯特可以被看成是一个康德主义者。但是，同时我们也应该看到，在对待"理念"的态度上，希尔伯特比康德积极乐观，因为他认为，在我们的理论所建立的框架内，我们可以毫不迟疑地信任理念；而康德认为，理念只是在认识中给我们更好、更进一步的指导。不过，具体到数学方面，希尔伯特的这种乐观是必需的，因为"无限"在数学中几乎是一个无法驱逐出去的概念，没有了"无限"，整个经典数学就很难得以建立。在数学分析中，虽然人们可以通过极限理论来使微积分摆脱"无限大"和"无限小"这样的概念，但是"无限"这个概念并没有彻底消失，就像希尔伯特自己所指出的那样："魏尔施特拉斯的分析确实通过把有关无限大和无限小的陈述归约为[有关]有限量之间的关系[的陈述]而消除了无限大和无限小。但是这个无限仍然出现在定义实数的无限数列中，并出现在被认为是一个同时存在的完备总体的实数系统的概念中。"②为了能够涵盖整个经典数学，希尔伯特引入了"理想元素"，他说："……(理想元素是)关于无限性概念的一个全然不同和很独特的想法。……这些理想的'无限'元素具有使连接定律系统变得尽可能简单的优点。……在某种意义上，数学分析是有关无限的交响乐。"③如果人们坚持康德对理念的看法，那么经典数学的确定性又如何得到保证呢？难道我们要把数学的确定性限制在有限的"有限领域"吗？我们上文说，在对待理念上，希尔伯特比康德更乐观，但是一个"乐观"并不能保证经典数学的确

---

① 大卫·希尔伯特．论无限．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：231.

② 大卫·希尔伯特．论无限．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：211.

③ 大卫·希尔伯特．论无限．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：215.

定性，所以说，从为经典数学奠基的角度上讲，希尔伯特面临着差不多和康德同样的问题（关于康德对待数学中"无限"的观点我们以后还要讨论）。希尔伯特又是如何解决自己的问题的呢？

在考察希尔伯特的解决办法以前，我们再看一处他和康德不同的地方，而这一点并不是不重要的。康德认为："几何学是综合地却又是先天地规定空间属性的一门科学。"①同样，在康德看来，对时间的直观使算术成为可能。希尔伯特并没有像康德那样，认为几何和算术的可能性条件是对空间和时间的直观，而是认为数学的可能性条件是对符号的直观。在这里，我们有必要对"符号直观"进行一些扼要的解说：我们可以考虑一个可感知的东西的序列，比方说：｜｜｜｜｜。当我们把序列｜｜｜和序列｜｜放在一起时，我们就会得到序列｜｜｜｜｜，从感知上讲，这是一个自明的事情。我们可以把以上的活动缩写成 $3+2=5$。按照希尔伯特的理论，这是一个确定的真理，但它不是语言上的，以定义而真的重言式的真理，也不是存在于独立的柏拉图王国的真理，并且它也不是一个一般意义上经验感知的真理，比方说：这本书的封皮是绿色的。它是一个先验的真理，这个真理来源于我们对有限的符号结构的纯粹直观，用希尔伯特自己的话说，就是："……数学的题材是具体的符号本身，它们的结构是十分清楚和可认识的。"②

二、希尔伯特计划

我们现在回到上面的问题，如上所述，希尔伯特的问题就是：无限的数学如何才能并入有限的框架中，从而获得自己的合法性？就像我们在上面看到的那样，希尔伯特是把数学分成了两部分：有

---

① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B41．

② 大卫·希尔伯特．论无限．//［美］保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：220．

限部分和无限部分。有限部分是有真值的和有意义的，无限部分是无意义的，也没有任何真值可言，就像“自然数集合的幂集的势大于自然数集合的势”这样的陈述既不真也不假。

就像康德相信理念的范导作用一样，希尔伯特也认为，人们可以把包含无限的陈述（理想元素）添加到数学的有限部分上去，这样就可以把数学的证明变得简单流畅，并且还可以导出新的、有限的结果。简单地说，无限的部分（理想元素）是一个有用的工具。然而，对理想元素的添加并不能是任意的，就像康德告诫过的，这可能导致矛盾，所以希尔伯特说：“只有一个与理想元素方法相联系的条件，尽管是绝对必要的条件。这个条件就是一致性证明，因为一个域通过添加理想元素而扩充，仅当扩充不使旧的较狭的域内出现矛盾时……才是合法的。”①

怎么证明一致性呢？

按照希尔伯特的康德主义观点，把逻辑规律应用于数学的有限部分是毫无问题的，而把逻辑规律应用于数学的无限部分却不能够总是恰当的，用希尔伯特自己的话说，就是：“最后我们引入理想陈述，使普通的逻辑规律能普遍成立。但是由于这些理想陈述即这些公式，就它们不表达有限陈述这一点而言并没有什么意义，所以逻辑演算实质上不能像应用于有限陈述一样应用于它们。”②

如果是这样，我们的出路在哪呢？希尔伯特说：“因此，必须使逻辑演算以及数学证明本身形式化”，接着希尔伯特向我们表明了，在罗素的《数学原理》的帮助下，这些都是可以形式化的。希尔伯特这样总结说：“这样一来，我们最后得到的不是用普通语言

---

① 大卫·希尔伯特．论无限．//［美］保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：229.

② 大卫·希尔伯特．论无限．//［美］保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：226.

传达的数学知识，而只是含有按照确定规则逐次生成的数学符号和逻辑符号的一组公式而已。公式中某一些对应数学公理，用来从一个公式推导出另一个公式的规则对应于实质演绎。于是实质演绎就被一个由规则支配的形式程序替换了。”①

充分理解形式化在这里是很重要的，在这个形式化的系统里，我们就有可能拥有通往证明一致性的办法。希尔伯特在《论无限》中这样写道：“(一致性问题)显然归约为证明：从我们的公理，根据我们所制定的规则，我们得不出‘$1\neq1$’作为证明的最后公式，或者换句话说，$1\neq1$ 不是一个能证明的公式。这个任务属于直觉处理的范围……一个形式化的证明，同一个数字符号一样，是一个具体而可见的对象。我们能完全地描述它。此外，最后公式的必要性质，即‘$1\neq1$’，是证明的一个具体的可确定的性质。因为我们事实上能证明以那个公式为最后公式的证明是不可能得到的，我们从而证明引入理想陈述是合理的。”②

为了与下面的内容有清晰的连接，现在我们用自己的语言总结一下希尔伯特对数学之一致性证明的计划：首先他根据他的康德主义思想把经典数学分成有限部分和无限部分，然后他又把经典数学形式化，于是，人们面临的不再是一个包含有普通语言的经典数学，而只是一个包含着没有意义的符号的形式系统，在这个形式系统里我们不再关心有限陈述和无限陈述的区分，事实上这些区分在形式系统里也就根本不存在，因为一切都形式化成了无意义的符号及其连接(符号串或公式)，并且在形式化以后，公式和公式之间只具有有限数量的结构关系。公理和推导规则在形式系统里并不具

---

① 大卫·希尔伯特．论无限．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：227.

② 大卫·希尔伯特．论无限．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：229.

有通常的所指，它们只保证人们如何对符号及其公式进行操作，推导规则提供形式程序。面对一个形式系统时，除了按照公理和推导规则对符号及其公式进行操作外，人们需要的只是对这些符号和公式的具体的直观，而这些符号代表什么，意味着什么是一点也不重要的。此外，在任何一个证明过程中，不能涉及无限数量的公式，也不能涉及对公式进行无限个操作运算。符合这种要求的证明过程被称为是“有限的”；符合这种要求的一致性证明不同于“模型法”的相对性证明，它可以被称为是“绝对的”。这一对证明的要求也是符合希尔伯特的哲学思想的，否则人们又走向了“无限”的不合法性。

为了对“无意义的符号证明”有一个清晰一些的了解，我们看一个具体的例子①：

假设有这样一个形式系统 S：

S 的初始元：个体：♣，♥；

S 的初始元：性质：◆，●

S 的公理：（1） $\forall x($◆$x\rightarrow$●$x)$

S 的公理：（2） $(\exists x$●$x)\rightarrow$◆♣

S 的公理：（3） ●♥

指示规则：MP(modus ponens)，UI(universal instantiation)，EG(existential generalization).

等待证明的定理：●♣

证明：●♥(Axiom 3)

∴ $\exists$x●x(By EG)

∴ ◆♣(By axiom 2 and MP)

∴ ◆♣→●♣(By axiom 1 and UI)

---

① 例子来源于：James Robert Brown. Philosophy of Mathematics. New York and London：Routledge，2008：68.

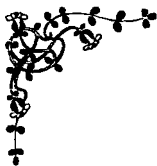
∴ ●♣(By MP)

从这个例子中我们可以清楚地看到，我们并不需要明白♣，♥，◆，●的含义，我们只需要直观到它们的分别就好了，所谓证明就是按照公理和指示规则进行操作，如果在最后一行出现了我们所需要的符号串，我们就说该符号串是定理。

但是，为了能够完成形式系统的一致性证明，希尔伯特还需要元数学，所谓元数学，就是关于无意义的、形式化的数学系统的有意义的命题，它们是关于形式数学系统的语言。比方说 $1 \neq 2$ 是某个数学形式系统的一个公式，这个公式本身并没有什么意义，也不必要去想 1 和 2 代表什么，但就此我们可以得到一个元数学命题，比方说，“这个公式的第一个符号是 1”，这个元数学的命题是有意义的。

有了元数学，我们就有可能去证明一个形式系统的一致性，比方说对于形式化数论。按照希尔伯特的方法，如果可以建立形式化数论的一致性证明，那么就可以通过有限的元数学步骤来证明：两个相互矛盾的公式(比方说 $1=1$ 和 $1 \neq 1$)不可能同时按照给定的推理规则从公理中推导出来。反之，如果形式化数论是不一致的，那么就可以通过有限的元数学步骤来证明：两个相互矛盾的公式可以同时按照给定的推理规则从公理中推导出来。

从以上的分析我们可以看出，希尔伯特的“有限证明论”的思想有很强的康德哲学的背景，也就是说，希尔伯特在设计“有限证明论”的时候，时时铭记康德的告诫，不让逻辑跨越“有限”；但同时，我们也看到了，如果希尔伯特的“证明论”能够成功，那么数学的“真”原则上就与作为纯直观的时间和空间无关，因而数学的命题并不是康德意义上的先天综合命题，而更像是一个以约定而为真的形式演绎系统，虽然希尔伯特给“符号直观”保留了一点点位置。



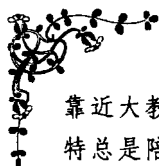
插录
希尔伯特小传



希尔伯特(David Hilbert), 1862年1月23日生于柯尼斯堡，他是康德的同乡。希尔伯特被认为是近代最重要的数学家之一。他的许多对数学以及数学物理的研究都开创了在数学和物理学方面的新的、独立的研究领域。他对数学基础的建议引发了对数学概念以及数学证明之定义的一项批评性分析。这一批评性分析导致了哥德尔不完全性定理，然而哥德尔不完全性定理却展示出："希尔伯特计划"是不可能成功的。1900年，希尔伯特在巴黎国际数学大会上提出了当时数学界未解决的23个问题，这些问题持续地影响了20世纪的数学的研究和发展。

希尔伯特的父亲奥托·希尔伯特(Otto Hilbert)是法官。他是一位知识结构不十分全面的法学家，因此，他对儿子的数学生涯总是持批评的态度，然而，希尔伯特的母亲玛利亚·特丽萨(Maria Theresia)却比较开明，她兴趣广泛，对天文学、哲学以及应用数学都抱有十分浓厚的兴趣。母亲的志趣无疑对儿时的希尔伯特产生了影响。像柯尼斯堡的所有的孩子一样，希尔伯特的成长也深受康德言论的抚育。每年4月22日是康德的诞辰纪念，在这一天，





靠近大教堂的地下圣堂对公众开放。在这个时候，希尔伯特总是陪伴着他的爱好哲学的母亲去那儿瞻仰，去看一看被月桂花环绕着的康德的半身像，端详他那熟悉的面孔，一字一句拼读圣堂墙上康德的格言。① 希尔伯特还有一个妹妹，但她活到28岁时就死去了。希尔伯特首先上的是弗里德里希中学，和康德上的是同一所中学，但在毕业前一年希尔伯特转入了偏重于自然科学和数学的威廉文理科中学(Wilhelms-Gymnasium)。对于希尔伯特在中学里的成绩，没有太多值得注意的东西流传下来，不过，据说有这样一个说法：希尔伯特不能写出很好的德语作文，于是她母亲经常为其代笔，但是他的数学非常好，他能够给老师们讲解数学问题。② 在毕业成绩单上，希尔伯特的数学老师封·摩尔斯坦(von Morstein)给了希尔伯特最好的成绩，在成绩单上他这样写道："彻底的知识，以及用自己的方式解决问题的能力"③对于自己的中学成绩，希尔伯特日后是这样说的："在中学里，我并没有好好地学习数学，因为我知道，我将来还会和它打交道的。"④



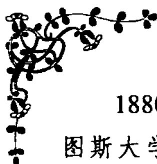
---

① 参见：[美]瑞德．希尔伯特：数学世界的亚历山大．李文林，译．上海：上海科学技术出版社，2006：3.

② 参见：[美]瑞德．希尔伯特：数学世界的亚历山大．李文林，译．上海：上海科学技术出版社，2006：7.

③ 德语原文："Gründliches Wissen und die Fähigkeit, die ihm gestellten Aufgaben auf eigenem Wege zu lösen".

④ 德语原文："Ich habe mich auf der Schule nicht besonders mit Mathematik beschäftigt, denn ich wußte ja, daß ich das später tun würde."

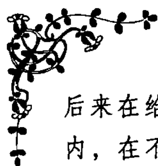


1880年，18岁的希尔伯特开始在柯尼斯堡的阿尔伯图斯大学(Albertus-Universität)学习数学。这所柯尼斯堡的大学在当时却有着光辉的数学传统，在数学方面具有世界一流水平。很多世界知名的数学家都在这里工作过，比方说雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi)、贝塞尔(Friedrich Wilhelm Bessel)、里奇罗特(Friedrich Julius Richelot)等。教过希尔伯特的老师中还有从海德堡过来的韦伯(Heinrich Weber)。也许正是由于韦伯的推介，希尔伯特大学的第二个学期是在海德堡度过的，不过希尔伯特又很快回到了柯尼斯堡。韦伯很早就认识到了希尔伯特的数学天才，并给予了希尔伯特很大的鼓励和促进。

在大学期间，希尔伯特结识了小他两岁的闵可夫斯基(Hermann Minkowski)。闵可夫斯基出生于一个立陶宛的犹太家庭，后来搬到了东普鲁士。希尔伯特对闵可夫斯基的友谊终生不渝。1883年林德曼(Ferdinand Lindemann)接任了韦伯的教授席位。林德曼曾经证明了π的超越性，从而证明了人们不可能化圆为方。1884年赫维茨(Adolf Hurwitz)被聘任为副教授(第二数学教授)。赫维茨只比希尔伯特大3岁，但是，希尔伯特后来却是这样谈论他的："我们，闵可夫斯基和我，被他的知识所震惊。我们那时不能相信，我们会赶上他。"①和赫维茨与闵可夫斯基的定期的科学交流给希尔伯特的学术生涯产生了巨大的影响。



① 德语原文："Wir, Minkowski und ich, waren ganz erschlagen von seinem Wissen und glaubten nicht, daß wir es jemals so weit bringen würden."



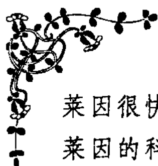
后来在给赫维茨的讣告中希尔伯特这样写道："在那八年内，在不计其数的、有时是每天都进行的散步中我们几乎翻查了数学知识的每一个角落，而赫维茨由于他的广阔的、多面的、有着坚固论据的以及整理得很好的知识一直是我们的导师。"①然而林德曼对希尔伯特的影响却不是很大，但希尔伯特的博士论文的题目却是林德曼给建议的。1885 年，希尔伯特撰写了题为《论特殊的二元形式，尤其是球面函数的不变性》的博士论文，但是为了获得博士学位，希尔伯特还得通过答辩。在答辩中希尔伯特为康德的算术观作了辩护，他赞同康德，认为算术判断具有先验性。希尔伯特的具体的答辩内容现在已经无记录可查，但他的论证显然是有说服力的，因为希尔伯特顺利地被授予了博士学位。②

在获得博士学位后，于 1885 年至 1886 年冬季学期希尔伯特做了一次学术旅行，他首先去了莱比锡大学拜见了克莱因(Felix Klein)。那时的克莱因年仅 36 岁，但已经是数学界的传奇人物，他 23 岁就做教授，并且在就职典礼上他发表了数学史上被称做《埃尔兰根纲领》的演讲。克



① 德语原文："Auf zahlreichen, zeitenweise Tag für Tag unternommenen Spaziergängen haben wir damals während acht Jahren wohl alle Winkel mathematischen Wissens durchstöbert, und Hurwitz mit seinen ebenso ausgedehnten und vielseitigen wie festbegründeten und wohlgeordneten Kenntnissen war uns dabei immer der Führer."

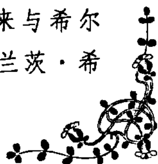
② 参见[美]瑞德．希尔伯特：数学世界的亚历山大．李文林，译．上海：上海科学技术出版社，2006：20.



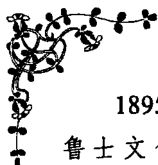
莱因很快认识到希尔伯特的数学天才，从此希尔伯特与克莱因的科学通信就没有中断过。在克莱因的建议下，希尔伯特还去巴黎待了几个月。对于所有有天赋的学生，克莱因都会建议他们去巴黎，因为克莱因自己正是由于1870年在巴黎结识了李(Sophus Lie)而获得了重要的启发。在巴黎，希尔伯特认识了很多著名的法国数学家，比方说埃尔米特(Charles Hermite)、彭加莱(Henri Poincaré)、约当(Camille Jordan)等。希尔伯特对彭加莱和埃尔米特的印象最深。彭加莱只比希尔伯特大8岁，但那时他已经发表了100多篇文章，并且很快就要被提名为科学院成员，而那时的希尔伯特还比较默默无闻。但是总之法国数学没有给希尔伯特留下太深的印象，也许是因为希尔伯特在巴黎水土不服，他总是拖着沉重的脚步去听课和开会。①

1886年，24岁的希尔伯特以题为《论在二元形式域内不变量理论研究》的论文获得了教授资格，然后他成为私人讲师。在赫维茨1892年去了苏黎世后，希尔伯特就成了副教授。1893年林德曼去了慕尼黑，希尔伯特被聘为教授。通过希尔伯特的努力，希尔伯特的好朋友闵可夫斯基被聘为副教授。

1892年，30岁的希尔伯特和凯特(Käthe Jerosch，1864—1945)结婚，凯特也是柯尼斯堡人，多年来与希尔伯特熟识并友好。希尔伯特和凯特生有一子：弗兰茨·希尔伯特(Franz Hilbert，1893—1969)。



① 参见[美]瑞德．希尔伯特：数学世界的亚历山大．李文林，译．上海：上海科学技术出版社，2006：29.



1895年希尔伯特受克莱因之邀去了哥廷根大学。普鲁士文化部想凭借高斯(Carl Friedrich Gauss)和黎曼(Bernhard Riemann)的传统把哥廷根大学建设成数学研究的重点。此项规划的主要推手是国务秘书阿尔特霍夫(Friedrich Althoff)，他同时又得到了克莱因的大力支持。希尔伯特那时只有33岁，所以有人指责克莱因弄来这么一个年轻人当教授。克莱因对此的回答是："你们错了，我聘请的可是令我最不舒服的(学术竞争对手)。"①事实上，克莱因和希尔伯特的个人关系一直很好。1902年，希尔伯特通过向柏林呼吁，闵可夫斯基被哥廷根大学聘任为副教授，这样两个数学老朋友又在一起了。但是，闵可夫斯基在44岁的时候因阑尾炎去世了，这对希尔伯特来说是一个沉重的打击。老朋友去世后，希尔伯特承担起编辑出版老朋友论文的任务，所编书名是《赫尔曼·闵可夫斯基的论文集》。

希尔伯特在哥廷根的最初几年并不是很愉快，因为在那个时候，小城哥廷根并不像大城市柯尼斯堡那样充满着开放和自由的精神。在哥廷根，大学圈子里的人的优越感很严重，以至于当希尔伯特，一个教授，和自己的助教打台球时被认为是丑闻。有一次，玻恩(Max Born)不能决定是留在法兰克福还是去哥廷根工作，就去寻求爱因斯坦的建议，爱因斯坦的答复颇能说明当时哥廷根的情况，爱因斯坦写道："如果我站在你的位置上想，我更情愿待在法



① 德语原文："Sie irren, ich berufe mir den Allerunbequemsten."

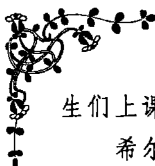


兰克福，因为对我来说，完全泡在一个傲慢的、多数是心胸狭窄(思维狭隘)的学者圈子里是不能够忍受的(没有其他的交流)。你们想想，希尔伯特在那样的圈子里都忍受了些什么。"①但玻恩没有听从爱因斯坦的建议，还是去了哥廷根，不过，他很快加入了希尔伯特的朋友圈子，又很快成了希尔伯特的助手。

希尔伯特也很快适应了哥廷根的生活，大学生们都很尊敬他。关于希尔伯特在大学生心目中留下的印象，他后来的博士生奥托·布鲁门塔尔(Otto Blumenthal)是这样报道的："我还清楚地记得，在第二学期的时候，他给我留下的非同寻常的印象：中等身材，行动敏捷，看起来一点不像教授，穿着一点也不引人注目，红色的胡子。这一切使他和值得尊敬的、有些驼背的韦伯以及目光锐利、充满威严的克莱因有着显著的不同。……希尔伯特的宣讲课没有任何雕饰，他讲课时严格地客观，他爱重复一些重要的句子，有时候不是很流畅。但是那丰富的内容和简单清晰的讲解使人们忘记外在形式的不足。他的课里有很多新的和自己独到的东西，但他并不强调这一点。他显然是试图让所有的人都理解他，他不是在给自己上课，他是在为学



① 德语原文："Wenn ich mich in die Lage denke, so kommt es mir vor, ich bliebe lieber in Frankfurt. Denn mir wäre es unerträglich, auf einem kleinen Kreis aufgeblasener und meist engherziger (und -denkender) Gelehrter so ganz angewiesen zu sein(kein anderer Verkehr). Denkt daran, was Hilbert ausgestanden hat von dieser Gesellschaft."



生们上课。……"①

希尔伯特在哥廷根这段时间一共带出69位博士，其中有伯恩斯坦(Felix Bernstein)、外尔(Hermann Weyl)、库朗(Richard Courant)等。希尔伯特的很多学生后来都成为大学教授、知名数学家。在希尔伯特的69位博士生中有6位还是女士。这在当时并不是不言而喻的事情，在普鲁士，直到1908年才普遍允许妇女进入高校学习。希尔伯特和克莱因为女数学家诺特(Emmy Noether)奔走的事情一时传为佳话。虽然诺特作为数学家具有很高的天赋和能力，但她是在克服了巨大的困难后才进入哥廷根大学任教的。多年来，她的宣讲课只能依托希尔伯特的名义进行。在讨论诺特的教授资格申请时，希尔伯特说过这样一句经常被引用的有趣的话："一个系可不是一个洗澡堂子！"②言下之意就是：为什么不能让女士进入呢？

在20世纪的前30多年内，希尔伯特一直为哥廷根大



---

① 德语原文："Ich erinnere mich noch genau des ungewohnten Eindrucks, den mir—zweitem Semester—dieser mittelgroße, bewegliche, ganz unprofessoral aussehende, unscheinbar gekleidete Mann mit dem breiten rötlichen Bart machte, der so seltsam abstach gegen Heinrich Webers ehrwürdige, gebeugte Gestalt und Kleins gebietende Erscheinung mit dem strahlenden Blick. [...] Hilberts Vorlesungen waren schmucklos. Streng sachlich, mit einer Neigung zur Wiederholung wichtiger Sätze, auch wohl stockend trug er vor, aber der reiche Inhalt und die einfache Klarheit der Darstellung ließen die Form vergessen. Er brachte viel Neues und Eigenes, ohne es hervorzuheben. Er bemühte sich sichtlich, allen verständlich zu sein, er las für die Studenten, nicht für sich. [...]"

② 德语原文："eine Fakultät ist doch keine Badeanstalt!"



学能够成为数学和自然科学的教研中心而奔走努力。尽管当时有很多好的大学和很多好的教授席位召唤着希尔伯特，但希尔伯特始终保持着对哥廷根大学的忠诚。希尔伯特为哥廷根大学上课直到 1934 年，那时希尔伯特已经 72 岁了。

1900 年，希尔伯特任德国数学联合会主席。1902—1939 年，希尔伯特是《数学年鉴》的重要的编辑者之一，当时该杂志是数学界最重要的杂志。他的编辑出版工作多年来受到其助手布鲁门塔尔的帮助。

希尔伯特肯定看到了，哥廷根大学的优秀的数学与物理传统是如何被纳粹无情地破坏殆尽。那些所谓的非雅利安人(像兰道、库朗、玻恩、伯恩斯坦、诺特、布鲁门塔尔以及更多其他的数学家与物理学家)和持不同政见者(像外尔)被强迫执行一些任务或被驱逐。1934 年，在一次宴会上，新上任的普鲁士课程部长鲁斯特(Bernhard Rust)问希尔伯特，是否在犹太人和犹太朋友离开之后，他的研究面临着很大的困难。希尔伯特回答说："它根本就不存在了!"①

在第二次世界大战的高潮点上，1943 年的希尔伯特的去世只被德国科学界顺便提及了一下。参加希尔伯特葬礼的几乎没有一打人。希尔伯特的同乡，来自柯尼斯堡的索莫菲尔德(Arnold Sommerfeld)在《自然科学》杂志上为希尔伯特的去世发表了一个讣告。而在美国却是另外一番景象：在美国的好多大学里人们都为希尔伯特举行了纪念活动。外尔在普林斯顿为希尔伯特撰写了讣告。



① 德语原文："[Das Institut -] das gibt es doch gar nicht mehr!"

三、哥德尔证明及其意义

希尔伯特是不是能够成功呢？事实上，希尔伯特的方案在某些形式系统方面是成功的，比方说，命题演算这个形式系统就可以通过希尔伯特的“有限证明论”被证明为是绝对一致的。不过，命题演算系统只是形式逻辑的很小一部分编码，它的符号和规则甚至不能发展出初等算术。当然，希尔伯特的方案有着更强的力量，比方说，通过元数学推理，就可以证明一个包含加法公理而不包括乘法的形式系统的绝对一致性。

我们上面说过，希尔伯特是在罗素的《数学原理》的帮助下完成他对经典数学的形式化的，而《数学原理》所提供的形式系统是足以表达整个数论的，而不是其中的一小部分。所以，对我们来说，重要的问题是：像《数学原理》这样的形式系统的一致性可以用希尔伯特的有限的元数学方法得到证明吗？

不幸的是，试图证明这个结论的尝试都失败了。直到1931年，哥德尔(Kurt Gödel，1906—1978)却给出了一个出人意料的证明。哥德尔的证明表明了，所有严格遵循希尔伯特原来方案的努力都是不可能取得成功的。哥德尔的证明有两个重要的结果，我们首先叙述这两个结果：

(1) 任一足以包含自然数算术的形式系统，如果是相容的，则它一定有一个不可判定的命题，即存在某一命题A，A与A的否定在该系统中皆不可证。这个结果通常被称为“哥德尔第一不完全性定理”。

(2) 在真的但不能由公理来证明的命题中，包含了这些公理是相容的这一论断本身。也就是说，如果一个足以包含自然数算术的公理系统是相容的，那么这种相容性在该系统内是不可证明的。这一结果通常被称为“哥德尔第二不完全性定理”。①

---

① 定理的叙述摘自：李文林．数学史概论．北京：高等教育出版社，2002：340.

哥德尔的证明是艰深的，在这里我们不打算复述它，甚至是它的概要。不了解哥德尔定理，但是对它有兴趣的人可以阅读 Ernest Nagel 和 James R. Newman 合写的《哥德尔证明》①，在那里哥德尔的证明得到了很好的刻画。

在这里，我们只是极其简略地勾画一下哥德尔的证明思路。在哥德尔的证明中一个重要的方法就是对映射的巧妙运用。首先哥德尔把形式化的算术系统中的符号、符号串都映射为数，这些数被称为“哥德尔数”；然后，哥德尔又通过递归函数的引进证明了所有元理论中关于表达式结构性质的命题都可以在算术系统中得到表示，这样，元理论的命题也就映射成了算术命题，它们也都获得了自己的哥德尔数。结果是：算术系统中的一部分表达式(符号串)获得了元数学的意义。

现在，我们以哥德尔第一不完全性定理为例来做进一步的说明，作为第一不完全性定理的证明的另外的关键一步是：在对象系统里构造这样一个命题 A，使其元数学的意义为“A 是不可证明的”，“A 是不可证明的”当然是一个元数学的命题，我们可以把它记为 A'。

A 就是我们需要的命题，A 在形式系统内是不可证明的。因为如果我们假设：A 是可证明的，那么 A 为真(因为我们的公理系统要求，凡是可证明的命题必然是真的)，进一步的结论是 A'真(因为命题的真理性在映射下保持不变)，而元数学 A'的意义是：A 是不可证明的。这与我们的假设矛盾，所以 A 是不可证明的。

A 的否定也是不可证明的，因为从上面的证明我们可以知道，A 为真，所以 A 的否定为假，我们的形式系统不可能允许证明假命题。

---

① 有兴趣的读者可以阅读：[美]内格尔，纽曼．哥德尔证明．陈东威，等，译．北京：中国人民大学出版社，2008.

综上，在我们的形式系统里存在一个不可证明的真命题 A。在这个结果上，哥德尔证明了“第二不完全性定理”。

在这里我们要提醒的是，就像《哥德尔证明》的作者所指出的那样，哥德尔定理并没有排除其他的一致性（相容性）证明的可能性，它排除的只是能被映射到《数学原理》内的一致性证明，也就是说，彻底的形式主义的有限证明。①

哥德尔定理在数学哲学上的影响是重大的。希尔伯特的形式主义的有限证明论看来是失败了；用公理系统来处理数学，并把数学理解成以约定而为真的系统的想法也是困难重重的，因为人们并不能在系统内证明系统是一致的，如果说我们搞出的数学公理系统是潜藏着矛盾的，那么建基在上面的数学就无真理可言，也没有权利声称它们是分析的。

哥德尔定理向我们表明了，在数学中“真的”和“可证明的”是两个不同的概念：在数学系统一致的前提下，“可证明的”当然都是真的；但是“真的”并不简单地意味着“可以证明的”。哥德尔定理向我们暗示了：数学的另外一个真理来源是直觉（直观）的洞察。哥德尔定理不仅强有力地否定了形式主义的数学观，也否定了大部分的逻辑实证主义者的数学观点，因为哥德尔定理表明，数学有时是需要直观洞察的，而逻辑实证主义认为，“直观”对于数学是根本不需要的，比方说克拉夫特的数学观，他在《维也纳学派》中说：“数学的先天有效性……根本不需要用‘纯粹理性’、‘纯粹直觉’、‘直观’或‘自明性’来提供这种根据，甚至也不要求经验提供这种根据。分析关系是逻辑关系而不是经验关系，而逻辑关系仅仅是符号系统内部的关系。”②

---

① 参见：[美]内格尔，纽曼．哥德尔证明．陈东威，等，译．北京：中国人民大学出版社，2008：83-85.

② [奥]克拉夫特．维也纳学派．李步楼、陈维杭，译．北京：商务印书馆，1998：28.

英国的物理数学家罗杰·彭罗斯(Roger Penrose)，一直工作在数学物理学的前沿，在《皇帝新脑》一书中，对哥德尔定理的意义有一段很强的柏拉图倾向的议论："无论情况如何，依我看来，哥德尔论证的清楚推论是，数学真理的概念不能包含在任何形式主义的框架中。数学真理是某种超越形式主义的东西。甚至即使没有哥德尔定理，这一点也是清楚的。在我们去建立一个形式系统的任何试图中，如何决定采取什么公理和步骤法则呢？我们在决定采取法则的指导总是，在给定系统的符号的'意义'下对何为'自明正确'的直觉理解。……然而若没有哥德尔定理，人们可能想象'自明'和'意义'的直觉概念只要在开始建立形式系统时用一次就好了，而此后就与决定真理的清楚的数学论证不相干。……哥德尔定理表明，这个观点在数学基本哲学中不能真正站住脚。……任何特定的形式系统都有特定的'人为'的品格，在数学的讨论中，这类系统的确起着非常有价值的作用，但是它只能为真理提供部分(或近似)的导引。真正的数学真理超越于人为的构造之外。"①在数学哲学上，罗杰·彭罗斯的确是一位柏拉图主义者，他说："我并不掩饰自己强烈同情柏拉图主义的观点，也就是数学真理是绝对的、外在的、永恒的，并不基于人造的判据之上；数学对象具有超越时间的自身的存在，既不依赖于人类社会，也不依赖于特定物体。"②

四、哥德尔与逻辑实证主义与康德

哥德尔早年参加过维也纳小组，因此哥德尔经常被认为是一个逻辑实证主义者。但是，我们从上面的哥德尔不完全性定理可以看出，哥德尔不可能是一个逻辑实证主义者。甚至在很早的时候，在

---

① [英]罗杰·彭罗斯．皇帝新脑．许明贤，等，译．长沙：湖南科学技术出版社，1995：129.

② [英]罗杰·彭罗斯．皇帝新脑．许明贤，等，译．长沙：湖南科学技术出版社，1995：133.

哥德尔的求学时期，他都没有完全相信过逻辑实证主义。我们经常在一些书籍中看到：哥德尔的名字被附在1929年石里克（或维也纳）小组宣言所列的成员名单上，然而哥德尔本人对人们的这一做法并不满意。哥德尔本人虽然同意（这是个事实，他也没有什么办法）将他的名字附在名单上，但他多年来都想和小组的主要原则分道扬镳。① 哥德尔在1946年给他的母亲以及1975年给格兰琼（Burke D. Grandjean）的信中曾这样写道："关于石里克的文章已经收到，我对此很感兴趣。你不必惊讶（在石里克的文章）里面没有提及我。事实上，我不是一个积极的石里克小组成员，我在很多方面甚至直接反对它的主要观点（Anschauungen）。"②哥德尔的导师是哈恩，他是维也纳小组成员，哥德尔对老师的感情也很深厚，但是这一切都不能说明哥德尔必须赞同逻辑实证主义，因为维也纳小组并不是一个宗教团体，虽然在某些方面它暴露出这样的倾向。不过显然的是，哥德尔的学术发展是受过维也纳小组影响的，但这并不是正面积极的影响，对此哥德尔本人是这样说的："我在数学基础上的兴趣确实是由'维也纳小组'引起的，但是我的结果推出的哲学后果，正如导致那些结果的助探原理一样，绝不是实证主义或经验主义的。"③

哥德尔直接反对逻辑实证主义的哲学基础，他认为逻辑实证主义的不足主要表现在三个方面：

（1）拒绝承认人们具有先天知识。

（2）把一切都还原为感官知觉，或者至少在假定物理客体的前

---

① 参见：[美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：87.

② 转引自：[美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：87.

③ 转引自：[美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：88.

提下，将一切都联系到感官知觉。

(3) 不把内省看做经验。①

哥德尔批评说："在论到内省时，他们便陷入自相矛盾。他们的经验观念太过狭隘，他们的哲学基础也太随意。罗素犯了更严重的错误，好像感官经验是我们能够从内省得到的唯一的经验。"②

在数学哲学方面，就像我们上面看到的，由于哥德尔不完全性定理，哥德尔不可能把数学看成是庞大的重言式。早期的维特根斯坦坚持"数学是庞大的重言式"(这是维也纳小组的信条)，后来维特根斯坦受直觉主义者布劳威尔的影响，对数学的观点有所改变，不过维特根斯坦仍然认为数学的一致性是不成问题的，至少讨论数学的一致性问题是无意义的，是"闲语"。③ 维特根斯坦确实看到过哥德尔定理，还对此作过一些讨论。1974 年，哥德尔在给门格尔的回信中对此作了评论："从你所引的段落中，的确可以清楚地看出，维特根斯坦并不理解它(或者是假装不理解它)。他把它解释成一种逻辑悖论，而事实上恰恰相反，它是数学的一个绝无争议的部分(有穷数论和组合数学)之中的一个定理。顺带说一下，你引的那整段话，在我看来全是废话。"④

逻辑实证主义的一位重要代表卡尔纳普试图修正"数学是庞大的重言式"的简单看法，他把数学看成是语言的约定。但是从哥德尔定理来看，这种约定也是不能成功的。哥德尔本人曾清楚地表达

---

① 参见：[美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：218.

② 转引自：[美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：218.

③ 参见：[奥]维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：112.

④ 转引自：[美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：227-228.

过："我的卡尔纳普篇证明了，数学不是语言的句法。"①

逻辑实证主义在工作方法上的一个唬人之处是：他们宣称自己和数理逻辑关系亲密，他们甚至给人以印象：逻辑实证主义就是数理逻辑，因此那些在哲学上和逻辑实证主义者有分歧的哲学家就纷纷疏远了数理逻辑。对这样的状况哥德尔很忧虑，我们下面援引哥德尔本人的三段话，让读者自己去判断，我认为这些话对于今天中国的学术状况来说，也是发人深省的。

> 逻辑实证主义的一个恶劣的影响是，他们称自己同数理逻辑关系亲密。结果，其他的哲学家倾向于让自己远离数理逻辑，因而丧失了一种精确的思维所带来的益处。数理逻辑让人更容易避免错误——即使对于不是天才的人，也是如此。

> 数理逻辑应该被非实证主义哲学家更多地使用。实证主义者倾向于把他们的哲学表现为一种逻辑的结果——为的是给它加上科学的威严。其他的哲学家以为实证主义就是数理逻辑，因此对后者避之唯恐不及。

> 非实证主义哲学家们对数理逻辑的无知令人吃惊。由于实证主义者把它等同于实证主义，其他的哲学家自然便反对他们所讨厌的这个哲学的所谓支柱，并因此忽视了它。重要的不是对逻辑的明确使用，而毋宁是这样一种思维方式，以及由此而来的一种看法，即成果可以用逻辑的方式表达出来。②

---

① 转引自：[美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：220.

② 转引自：[美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：219.

数理逻辑学家、哥德尔的朋友王浩在他的书中很好地总结了哥德尔对逻辑实证主义的态度，他这样写道：“哥德尔讨厌实证主义，一定程度上是因为他认为实证主义态度对哲学和科学的事业具有负面的影响。一方面，他相信这种态度把哲学家们的注意力引离了更有成果的哲学工作，另一方面，他相信这种态度妨碍了我们对物理学和数学的某些基础领域作有效的探讨。一般而言，他相信，实证主义态度对于充分利用我们的精神力量从根本上理解并进而改善世界的可能性施加了武断的限制。”①

哥德尔对康德哲学的接触很早，从 1922 年就开始了，那时哥德尔才 16 岁。据王浩，哥德尔 1975 年告诉他，哥德尔 1922 年就开始阅读康德的某些著作，这对于他知识兴趣的发展很重要。1925 年，刚上大学的哥德尔就从图书馆借阅了康德的《自然科学的形而上学基础》。② 据王浩说，哥德尔对康德的著作烂熟于心，在别处曾极力称赞康德的思想。在讨论胡塞尔的时候，哥德尔经常拿他的工作与康德的工作相比。③

我们下面援引哥德尔本人的一段话来证明这一点。

> 康德和胡塞尔在用语上很接近；比如两人都讲“先验主义”。胡塞尔做的就是康德的事，只是做法更系统些。康德和莱布尼茨也是绝对主义者；三个人中只有胡塞尔明确承认这点。胡塞尔和康德都从日常知识出发。胡塞尔确立了一种系统哲学的开端。康德看出，所有的范畴都应该归结到某种更基本

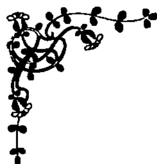
---

① ［美］王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：217.

② 参见：［美］王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：86.

③ 参见：［美］王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：215.

的东西。胡塞尔试图找到所有范畴背后那更基本的观念。康德关于范畴的公理没说出多少东西。真正的公理应该蕴涵整个先天科学。



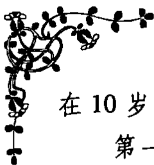
插录
哥德尔小传



哥德尔(Kurt Friedrich Gödel),1906年4月28日(有的说法是4月26日)生于布吕恩(Brünn)。他的家庭是一个富裕的资产阶级家庭。布吕恩在哥德尔出生的时候并且直到1918年都属于奥匈帝国,今天布吕恩位于捷克境内。在当时,布吕恩大部分的人讲德语。哥德尔的父亲鲁道夫和母亲玛丽安也都是德裔,而不是捷克血统。父亲信奉天主教,母亲信仰新教,孩子们受的则是新教教育。

哥德尔小时候的健康状况就很糟糕,据说5岁时他得了轻度的焦虑性神经官能症(leicte Angstneurose),8岁时又得了严重的"风湿性关节炎,伴有高烧"。但是这并没有影响哥德尔在学校里的学业,他学习一直很优秀。小哥德尔爱问问题,因此得了绰号"为什么先生(Herr Warum)"。1912年,6岁的哥德尔上小学,4年后他进入了讲德语的国立文理科中学(Staatsrealgymnasium)。据说,





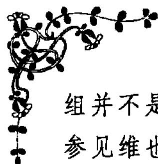
在10岁的时候哥德尔对数学和物理的兴趣已经表现出来。

第一次世界大战后，布吕恩划归于新成立的捷克斯洛伐克共和国。由于哥德尔的捷克语很糟糕，据当时的同学回忆，他们没有听哥德尔说过一个捷克字。因此，在这个新的国家里，哥德尔找不到家的感觉，于是，他在1923年申请加入奥地利国籍，获得了批准。1924年，哥德尔搬到了维也纳，最初他在维也纳大学里学习的是理论物理。在随后的很多年里，他主要研究的是物理问题。此外，他还去听龚柏茨(Heinrich Gomperz)的哲学课以及富特文格勒(Philipp Furtwängler)的数论课。这两位教授给了哥德尔决定性的推动，促使他日后去深入地探讨数学哲学这样的基础问题。哥德尔对哲学的热爱是很深刻的。在哥德尔死后，人们在他未发出的文档里看到了一份他对一位名叫朗格尚的社会学家的问卷的答复。朗格尚列出了许多思想家，并请哥德尔指出哪些影响过他，哥德尔清楚表明了朗格尚的想当然有多么离谱，因为莱布尼茨居然没有列进来。对于朗格尚的问题："影响你的哲学发展的因素中，有什么你觉得特别重要的吗?"哥德尔的全部答复是："维也纳哲学教授龚柏茨。"①哥德尔并没有提到信奉逻辑实证主义的任何人。

哥德尔在上大学之初，就开始去参加石里克(Moritz Schlick)创建的维也纳小组。在当时，能够进入维也纳小



① 参见：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：37-38.



组并不是一件很容易的事情，因为人们只有受到邀请才能参见维也纳小组的聚会。后来杰出的、并且在那时也已经崭露头角的哲学家波普尔，也只能急切而徒劳地等待加入城里最重要的圈子的邀请。① 由于哥德尔是哈恩的优秀学生，才获邀加入维也纳小组的。和哈恩(Hans Hahn)、门格尔(Karl Menger)以及陶斯基(Olga Taussky)的交谈对哥德尔来说具有重要的意义，因为它扩展了哥德尔的数学知识。但是哥德尔与逻辑实证主义者的交往却导致了一种误解：认为他是实证主义者，他的不完备性定理是实证主义原则的结果。② 其实，早在1925年，即哥德尔加入小组的头一年，他已经是一个柏拉图主义者。逻辑实证主义者的反形而上学倾向对他没有影响。③ 直到生命结束，哥德尔都很沮丧，因为人们仍然认为他的观点与维也纳小组的观点一致。④

在维也纳的学习和生活使哥德尔认识了自己日后的夫人阿黛勒(Adele Porkert)。由于哥德尔和哥哥的新居恰巧在阿黛勒家的对面，就这样哥德尔与阿黛勒发展出了恋爱

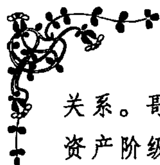


① 参见：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：47-48.

② [美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：48.

③ 参见：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：48.

④ 参见：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：49.



关系。哥德尔的父母反对这一关系，因为阿黛勒出生于小资产阶级家庭，曾做过卡巴莱舞蹈演员，也没有受过什么教育，况且她比哥德尔大了将近7岁，并且直到1933年她还与摄影师尼姆布尔吉(Nimburki)有婚姻关系。显然，作为富裕资产阶级的哥德尔的父母不能接受这门不当户不对的婚姻，于是哥德尔和阿黛勒的恋爱关系转入到地下。

在维也纳学习期间，哥德尔熟悉了“希尔伯特计划”。我们知道，希尔伯特计划就是要证明数学的无矛盾性(一致性)。1929年，哥德尔撰写了自己的博士论文《论逻辑计算的完全性》，1930年，24岁的哥德尔被授予博士学位。他的导师是哈恩。哈恩是一位一流的数学家，他的名字我们会在泛函分析里的哈恩-巴拿赫扩张定理中看到。

在20世纪30年代，哥德尔专注于自己的科学研究。他研究连续统问题，并且追问自然数的理论是不是完全的，是不是可以无矛盾地公理化。1931年，哥德尔发表了论文《论数学原理和相关系统的形式上不可判定语句》，这一论文的结果就是后来被称为“哥德尔不完备性定理”的定理。这一定理粉碎了希尔伯特的梦想，因为它证明了希尔伯特计划是不可能成功的。其实，早在1930年的一次元数学会议上，哥德尔就声称自己证明了算术的不完备性。那时的哥德尔还是一位不出名的研究生，因此在场的人基本上都没有注意，当然在场的逻辑实证主义者也没能注意到这一宣称，据说当时只有冯·诺依曼注意到了。

但是，金子总是要发光的。哥德尔划时代的工作，以及其工作的令人惊奇的结果使哥德尔成为他那个时代的顶





尖的逻辑学家。于是他的美国同事、杰出的数学家维布伦(Oswald Veblen)邀请他加盟当时新成立的普林斯顿高级研究所。从1933年到1934年，哥德尔第一次来到美国，并在那里和亚历山大(James Alexander)、诺依曼(John von Neumann)以及维布伦一起成为该所的奠基成员。但是，就在这一时期，哥德尔的精神病开始发作了。他的这一疾病也许从他孩童起就存在了，只不过现在是第一次以情绪低落和疑病症的形式出现。研究者普遍认为：哥德尔精神的负担只能归结为私人性质的东西，因为他对当时欧洲的政治局势一点儿也不感兴趣。

当哥德尔1934年初返回维也纳的时候，他已经又得到了普林斯顿的讲课邀请。健康状况的下降使得哥德尔在1934年秋在疗养所修养了一个星期。哥德尔健康状况下降的原因是营养不良，因为哥德尔总是病态地担心食物中有毒，以至于阿黛勒必须当着他的面烹饪食物。疗养后，哥德尔得到了足够的休息，他又开始研究连续统问题。哥德尔试图证明连续统假设相对于其他的集合论公理是独立的。1938年，哥德尔证明了(该定理1940年发表)：如果ZFC公理系统是无矛盾的，那么人们就不能通过ZFC公理来否定连续统假设。1963年，美国人科恩(Paul Cohen)进一步证明了：如果ZFC公理系统是无矛盾的，那么人们也不能通过ZFC公理来证明连续统假设。这样看来，连续统假设相对于ZFC公理系统是独立的。

随着年纪的增长，哥德尔的健康状况越来越糟糕。从孩童时期开始，哥德尔就怀疑自己的心脏不好，医生们并

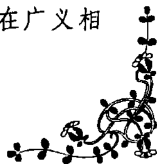




不能确诊这一点，于是他就开始不相信医生。他避免看医生，因此在20世纪40年代的时候他险些因为十二指肠溃疡没有得到及时救治而丧命。1935年，哥德尔在心理诊所里待了几个月。

1938年9月20日，32岁的哥德尔终于和阿黛勒结了婚。在奥地利被法西斯德国吞并后，由于教育制度的转换，哥德尔失去了他的讲师职位。他试图在德国的教育系统里得到一个相应的学术职位，但是由于哥德尔被认为是强烈犹太化的数学的代表，他的申请被一再拖延。从父亲那里继承到的供自己和阿黛勒生活的钱款也慢慢地用完了，这样哥德尔夫妇就没有了固定的生活收入。当哥德尔在维也纳被错误地当做犹太人辱骂的时候、当他被召唤到德国军队中服役的时候，他这才最终决定离开自己的故乡到美国去。

在美国，哥德尔花了很多时间研究哲学，对形式逻辑的研究则放松了很多。哥德尔花了很多的时间研究莱布尼茨的哲学，然后是胡塞尔的哲学，哥德尔对康德的哲学也很熟悉。哥德尔后来还研究神学。他曾试图借助形式逻辑作一个本体论的上帝证明，不过这项证明在他死后才发表。1941年，哥德尔写了最后一个关于逻辑问题的论文，该论文1958年才发表。1942年，36岁的哥德尔认识了爱因斯坦，开始与爱因斯坦讨论像相对论这样的物理问题，或者他们也讨论哲学问题。哥德尔给出了第一个具有封闭类时世界线的广义相对论的解。这个解展示出：在广义相对论成立的前提下，时间旅行是可能的。





1947年，41岁的哥德尔获得了美国国籍。在美国，在加入国籍前，一个法官听证是必要的，该听证主要考察申请人对美国和美国宪法的了解。哥德尔在准备听证的时候发现：美国宪法“不完备”，也就是说，在美国宪法允许的范围内有可能建立起独裁政府。多亏两位陪同者的帮助和法官的开明，哥德尔才免于陷入麻烦。值得一提的是，两位陪同者之一就是爱因斯坦。从这个例子我们可以看出，爱因斯坦比哥德尔通人情世故多了。

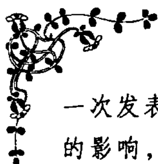
在爱因斯坦和哥德尔之间发展出了深厚的友谊，这种友谊一直持续到1955年爱因斯坦去世。他们经常一块从研究所散步回家，爱因斯坦老年时曾说，他到研究院来仅仅是为了能有和哥德尔一起走路回家的特权。① 除了少数几个朋友外，哥德尔在普林斯顿是孤独的，孤独的外在的原因是哥德尔的妄想症，内在的原因是他在思想观点上的孤独，因为在实证主义盛行的年代，他却是一个坚定的柏拉图主义者。哥德尔在1953年(那时他已经47岁了)才得到教授职位，主要原因是外尔和西格尔(Carl Ludwig Siegel)认为哥德尔行为古怪不适合做教授。

在20世纪60年代，哥德尔已经停止了授课，因为他的健康状况已经不允许他上课或进行社会交往。人们给了哥德尔许多学术奖励，一直认为他是逻辑界的领军人物，但他的状况却依然没有好转。1970年，哥德尔试图最后



---

① 参见：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：15-16.



一次发表论文，但他的论文被退了回来，原因是由于药物的影响，致使哥德尔忽视了很多明显错误。

哥德尔的最后几年是在普林斯顿家里或者疗养院里度过的。晚年的哥德尔不吃别人烹饪的食物。当1977年，阿黛勒由于心脏病住进医院的时候，哥德尔只能不断地瘦下去。阿黛勒出院后，马上把不到40公斤的哥德尔送进医院，但是哥德尔还是在几周后由于营养不良去世了，时间是1978年1月14日。



第四节　康德和柏拉图主义

一、柏拉图主义关于数学的基本观点

从上面的引述我们可以清楚地看出，哥德尔定理虽然不支持形式主义以及逻辑实证主义的数学观，但是它却向我们暗示着“柏拉图数学王国”的存在，因为有些数学命题虽然在目前的情况下不可判定，但人们可以“洞察”其为真。在对待数学方面，哥德尔本人就是一个柏拉图主义者，他本人并不认为对于形式主义者的形式系统而言不可判定的问题就是没有真假的问题，因为人们可以通过在“柏拉图王国”中“找到”新的数学公理来解决一些数学问题的判定。哥德尔在《罗素的数理逻辑》一文中说：“结果证明（在现代数学是一致的这一假定下）某些算术问题的解决要求本质上是超越算术（亦即可能最适合于与感官知觉相比的那种初等的无可置疑的领域）的假定。此外，对于抽象集合论的某些问题的判定，甚至对于某些有关的实数论问题，建立在某一迄今未知的思想之上的新公理是必要的。或许，某些其他数学问题多年来所呈现的看来不可克服

的困难，也是由于必要的公理还没有被找到这一事实。”①

柏拉图主义数学观和其他数学观相比，有其优越的地方，它也受很多大数学家的青睐。这里，为了以后讨论的方便，我们先总结一下现代的柏拉图主义者的基本数学观：

（1）数学有其自身的对象（内容），这些对象是真实的，不依赖于我们而存在，所以它们也不能被我们完全还原成逻辑或什么形式系统。

（2）数学的对象是超时空的。在这种意义下，数学对象都可以看成是抽象的。进而数学是先验的，而不是经验的。

（3）我们可以直观数学对象，并抓住它们的“真”。不过这并不是说，我们可以直观所有的数学对象并理解它们的真理，就像在物理世界里，我们可以感性直观一些东西，并确信它们是真实的，但这并不意味着我们能直观所有东西。

（4）说数学真理是先验的、永恒的真理，但这并不意味着我们在研究数学问题时不会犯错误，因为数学的柏拉图王国里的真理是外在于我们的；正因为如此，现实的数学研究是可错的，但因而它也是向各种各样的不同的研究技巧开放的。

数学史中大量的例子也都在不同程度上暗示着柏拉图主义数学观的正确性，但这也只不过是暗示而已。柏拉图主义的最大问题，我们在前文也指出过，是：我们究竟是如何走进柏拉图王国的？靠回忆？（这是柏拉图自己的方案）靠“心眼”（the mind's eye）？这听起来都有些神秘主义的味道。②

---

① 库尔特·哥德尔．罗素的数理逻辑．//［美］保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：521-522.

② 有人开玩笑说，人们依靠“柏拉图子”（platon）和柏拉图王国进行交流，什么是柏拉图子呢？柏拉图子就像电子（elektron）、质子（proton）一样。观察一下这三个词的词尾，这确实是一个好玩的文字游戏。

二、康德和柏拉图主义者在对待数学基础方面的异同

从柏拉图主义的数学观点出发，也必然得出"数学命题是先天综合命题"的结论。但是，在对待数学上，康德并不是一个柏拉图主义者。我们还是先看一段康德对柏拉图的批评吧："数学固然只是在对象和知识能表现在直观中这一限度内研究它们，但这一情况很容易被忽略，因为上述直观本身可以先天地被给予，因而和一个单纯的纯概念几乎没有什么区别。被理性力量的这样一个证明所引诱，要求扩张的冲动就看不到任何界限了。轻灵的鸽子在自由地飞翔时分开空气并感到空气的阻力，它也许会想象在没有空气的空间里它还会飞得更加轻灵。同样，柏拉图也因为感官世界对知性设置了这样严格的限制而抛弃了它，并鼓起理念的两翼冒险飞向感官世界的彼岸，进入纯粹知性的真空。他没有发觉，他尽其努力而一无进展，因为他没有任何支撑物可以作为基础，以便能够撑起自己，能够在上面用力，从而使知性发动起来。"①

比较康德的数学观和柏拉图主义的数学观是很有意思的。他们都认为，数学命题是先天命题，并且数学命题不能只依靠纯分析得到，数学是本质上需要直观的，不过这两种直观是不同的。在康德那里，数学所需要的直观是纯直观(reine Anschauung)，什么是纯直观呢？康德说："……一般感性直观的纯粹形式将会先天地在内心中被找到，在这种纯粹形式中，现象的一切杂多通过其中关系而得到直观。感性的这种纯形式本身也叫纯直观(reine Anschauung)。"②而柏拉图主义的直观却是一种"心眼的直观"(the intuition of the mind's eye)，直观者比方说是人，直观的对象是"理

① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A4/B8-A5/B9.

② ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B35/A21.

念”，它不依赖于人地存在于柏拉图的理念世界里。因此，柏拉图主义者并不需要“一般的感性直观”，也不需要把他们的“直观”限制在“一般感性直观的纯粹形式”上，柏拉图主义者的直观也包括“理念直观”。在这种意义上，柏拉图主义的“直观”在康德那里应该属于知性直观，康德并不否认这种直观，他只是说人不具备这种直观。“直观”对柏拉图主义者来说，只是通向“理念王国”的一种途径，虽然，这种途径对于想通达“理念王国”的人类来说是必不可少的。

康德的“纯直观”可以在“内心”中先天地被找到，如果说数学建立在“纯直观”上，那么数学就有了很强的主观建构的味道（关于这一点，我们后面还要涉及它和直觉主义的联系）。不过康德强调说，虽然一般感性直观的纯粹形式将会先天地在内心中被找到，但它并不是因人而异的，对人类来说，它是普遍的和必然的，康德甚至说：“我们也并不需要把空间和时间中的这种直观方式局限于人类的感性；有可能一切有限的有思维的存在者在这点上是必须与人类必然一致的（尽管对此我们无法判定）……”①用现代流行的哲学话语说，康德的“数学的客观性”是一种“主体间的必然性”，这一点与柏拉图主义是很不相同的，对于柏拉图主义者来说，“数学的客观性”来源于不依赖于人的、客观的“理念王国”。柏拉图主义的客观性并不仅仅是主体间的客观性，它包含着更强意义上的客观性。

从普通人的角度来看，康德的数学观显得比柏拉图主义数学观更能让人接受一些，但是，就像希尔伯特所强调的那样，“无限（比方说实无穷集合）”在数学中有着不可或缺的地位，康德的数学观能对包含“实无穷集合”的现代数学提供哲学基础吗？好像不能，

---

① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B73.

就像我们在康德对柏拉图的批评中看到的那样，康德认为，理性在离开了“可能经验”后可能会毫无成果，甚至会走向谬误，而“实无穷集合”完全不属于“可能经验”。至多“潜无限”属于可能经验；“实无穷集合”是不可能属于可能经验的。

三、逻辑能毫无顾忌地飞跃可能经验吗？

也许有人会这样说，我们可以把我们的知识扩展到可能经验之外，只要我们严格地遵守逻辑就可以了，逻辑可以引领我们冲破任何可能经验的界限，所以说，康德的担心是无所谓的，毫无根据的。在这里，我不打算详细地讨论逻辑和可能经验的关系，只给出一个来自于现代物理学的例子，来表明康德的担心并不是毫无道理的，当然，我也不认为这个例子有决定性的含义，只想据此指出，问题并不像人们想象的那样简单。

我们看一下量子力学中的双缝实验：我们取电子做这个实验，已知电子是整的，不可再分的(现代物理的任何实验都没有证据显示，电子是有内部结构的，电子是可以再分的)。电子将通过带有双缝的屏到达后面的屏。带有双缝的屏是这样设计的，即除了缝隙处电子没有其他的途径到达后面的屏。

令 p 表示电子“穿过”缝隙，则 $\neg p$ 表示电子“没有穿过”缝隙。如果电子穿过缝隙，并且这里我们只有两个缝隙，那么它要么从缝隙 1 穿过，要么从缝隙 2 穿过。令 q 表示从缝隙 1 穿过，基于上述情况，从缝隙 2 穿过，必然是 $\neg q$。

$p \vee \neg p$ 这是排中律，按照经典逻辑它重言地真着。

$p \rightarrow p$ 这是同一律，按照经典逻辑也重言地真着。

$p \equiv (q \vee \neg q)$ 这是我们实验的规定，它表示如果电子到达后屏，要么是通过缝隙 1，要么是通过缝隙 2。

$q \vee \neg q$ 排中律

综上：$p \rightarrow (q \vee \neg q)$ 必真。

电子从“源”处发射，如果说我们在后面的屏上看到了一个电

子，因为电子是整的，从实验安排和逻辑上讲它不可能同时穿过两个缝隙，它只可能从其中一个缝隙穿过，用以上的符号表示就是：$p\rightarrow(q\vee\neg q)$。

为了更容易理解，我们看一个日常的例子：如果说小明不会分身法，并且他现在在北京，那他现在肯定不在武汉。如果说从北京到武汉只有两条路可走——京广线和京珠线，并且小明不会分身法，如果说小明从北京到了武汉，那么我们说小明肯定是从其中一条路来武汉的，他不可能同时走两条路。

所以，我们希望逻辑有这样的力量：我们不必通过实验，只要我们根据已知事实，理想地设定了我们的"如果"，我们的"那么"就必须是正确的，逻辑的真是不依赖于具体的实验的，也就是说，我们不必要实际地做电子和小明的实验，只要我们根据已知事实理想地设定了我们的前提，我们的逻辑会告诉我们 $p\rightarrow(q\vee\neg q)$ 是必然正确的。

这一切看来是显然的，真的是这样的吗？

我们再来看电子的例子：假设我们一个一个地发射电子，电子逐次地到达了后屏，我们不用去观察后屏，我们就可以逻辑地推理出达到后屏上的电子将是一个什么样的分布。因为由于电子是整的，每个不同的电子肯定是要么是通过缝 1 过来的，要么是通过缝 2 过来的。它们的分布就应该等于从缝 1 过来的电子的分布加上从缝 2 过来的电子的分布。也许有人用子弹已经做过了这样的实验，结果是：它完全符合我们的逻辑推理。

现在我们来看电子实际上在后屏上产生的分布，结果是令人惊讶的，分布图案并不与我们的逻辑推理相一致，也就是说，它们的分布不等于从缝 1 过来的电子的分布加上从缝 2 过来的电子的分布，它们出现了干涉。

如果我们跟踪每一个电子，看电子到底是如何穿过这两个缝隙并且还造成干涉图案的，如果我们能做到这一点，我们又发现在后屏上的结果和我们的逻辑预言相一致，即它们的分布等于从缝 1

过来的电子的分布加上从缝2过来的电子的分布。在逻辑上，本来使我们骄傲的是这样的事情：只要前提是确定的，我们不需要对中间过程的“直观”就能够“推理”出结果，而现在我们必须得“看”到这一中间过程，在不“看”的情况下，我们的逻辑推理是错误的。

从这个量子力学的实验中，我们得出了一个有利于康德的结论：逻辑的有效运用需要是在可能经验的范围之内的，尽管逻辑并不依赖于某个具体的经验，但是，如果超出了可能经验的范围，我们的逻辑推理可能导致错误。在我们这个例子中，要想得到干涉图案，我们必须对“电子如何穿过缝隙”保持无“直观”，也就是说，“电子如何具体穿过哪条缝隙”在得到干涉图案的条件下并不属于可能经验，我们并不能把我们的逻辑推理延伸到这一领域。就像美国物理学家费恩曼(R. P. Feynman, 1918—1988)在评价双缝实验时所指出的那样：“我们所必须说的(为了避免作出错误的预测)是：如果人们观察小孔，或者更确切地说，如果人们有一架仪器能够确定电子究竟通过孔1还是孔2的话，那么我们就能够说出电子或者穿过孔1，或者穿过孔2。但是，当人们不试图说出电子的行径，当实验中不对电子做任何扰动时，那么他们不可以说电子或者通过孔1，或者通过孔2。如果某个人这么说了，并且开始由此作出任何推论的话，他就会在分析中造成错误。这是一条逻辑钢丝，假如我们希望成功地描述自然的话，我们就必须走这一条钢丝。”①康德在《纯粹理性批判》中对“逻辑的超验运用”清楚地表达了自己的反对，他说：“……既然这种逻辑真正说来只应是对经验性使用加以评判的一种法规，那么如果我们承认它是一种普遍地和无限制地使用的工具，并胆敢单凭纯粹知性去对一般对象综合地下判断、提看

① [美]费恩曼，等. 费恩曼物理学讲义：第一卷，郑永令，等，译. 上海：上海科技出版社，2005：385.

法和作裁决，那就是对它的误用。”①虽然，康德在这里指的是先验逻辑，但是对于“形式逻辑”来说也是恰当的，就像邓晓芒教授所指出的那样：“形式逻辑不过是附属于范畴之上的形式而已，所以它虽然是‘普遍逻辑’，可以运用于一切（经验的和非经验的）对象之上，但唯有借助于范畴（借助于先验逻辑）而运用于经验知识之上才是它的本分。”②

四、波粒二象性并不能回答双缝实验所引起的逻辑问题

人们很容易满足于电子的波粒二象性这样的解释。仿佛有了波粒二象性，双缝实验所引起的逻辑问题就得到了解释似的。其实这样的解释什么也没有给我们提供。迄今的一切物理实验都向我们表明电子是整的、不可分的。说电子是波，或者说电子也具有波的性质，那只是一种模糊的说法。就双缝实验而言，电子在后面显示屏上的明暗相间的条纹只是表明了暗的地方电子少些，明的地方电子多些，而每个电子都是整的，它们从来也不会以弥散的方式出现。“电子是粒子或电子具有粒子的性质”和“电子是波或电子具有波的性质”，这两种说法并不在同一层次上。运用一些分析哲学的知识，这很容易得到阐明。“电子是粒子”的意思是电子是粒子的一种，或者说电子具有粒子的性质，就像说狗是动物，花是植物一样。但是“电子是波”是什么意思呢？电子是波的一种吗？如果人们检测电子，那么人们总是检测到整个电子。凭什么说电子是波呢？就一个电子而言，电子也不弥散，谈波峰和波谷是毫无意义的。电子具有波的性质吗？两列波相遇会产生干涉，两个电子相遇会产生干涉吗？我们知道两个电子并不产生干涉，就双缝实验而

---

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A63/B88-A64.

② 邓晓芒．康德哲学诸问题．北京：生活·读书·新知三联书店，2006：10.

言，简单地说，产生干涉的是通过不同的缝隙到达后屏上同一个地方的概率波幅，是概率波幅产生了干涉，而不是电子产生了干涉。

其次，认为电子是波的误解来源于薛定谔方程。薛定谔方程是量子力学中的基本的动力学方程，在既定条件下求解薛定谔方程，我们就可以得到描述粒子在时空中变化的函数，借助这个函数我们就可以断定粒子在某时出现在某地的概率。而薛定谔方程中的这个函数通常被称为波函数。其实这个函数和真正的描述波的函数并不一样，它们的物理含义也很是不同。描述真正的波的函数和概率无关。只不过它们的数学形式有相像的地方，但也仅仅相像而已。爱因斯坦就不说"波函数"，他只说"ψ 函数"。

综上，就双缝实验而言，在后屏上出现了明暗相间的条纹的前提下，从清楚的逻辑出发，人们仍然可以发问：电子到底是从哪个缝隙穿过的？波粒二象性对这样的问题不能提供任何满意的回答。

然而数学的历史和实践告诉我们：排除了"实无限"的数学将是苍白无力的数学。柏拉图主义很容易对"实无限"进行辩护，因为"实无限"就存在于柏拉图王国里，人们需要做的只是：发现它，用正确的方式对待它。如果说柏拉图主义不想停留在神秘主义里，那么它就得发展自己的方法论，比方说，用更清楚的语言解释像"心眼"(the mind's eye)这样的词汇。

而康德的数学观面临的是"实无限"的问题。严格地从康德的思想出发，人们必然地要把"实无限(尤其是实无穷集合)"排除出数学，而这是像希尔伯特这样伟大的数学家不愿意看到的，希尔伯特在《论无限》中说："任何人都不能把我们从康托尔给我们创造的天堂里驱逐出来。"①人们知道，在这个"天堂"里，居住的尽是"实无穷集合"。

① 大卫·希尔伯特. 论无限.//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南. 数学哲学. 朱水林，等，译. 北京：商务印书馆，2003：219.

在数学哲学里，直觉主义是反对“实无穷集合”的，现在我们把目光转向直觉主义，看一看它的数学观，以及它和康德的联系，看一看它是否能把我们带入对数学本质的更深入的理解。

第五节　康德和直觉主义

一、在数学哲学方面直觉主义与康德的联系及区别

由于直觉主义的思想也是不能一概而论的，所以，在这里我们主要关心直觉主义的重要代表布劳威尔、阿伦特·海廷（Arend Heyting，1898—1980）以及外尔（Hermann Weyl，1885—1955）的主要数学观点。在数学上“布劳威尔不动点定理”非常有名，此定理在解微积分方程和拓扑学方面都有着重要的运用，而外尔是20世纪最伟大的数学物理学家之一，在数学和物理的很多方面都有非凡的建树。不过，在这里我们抛开直觉主义在数学上的建树不谈，我们的重点是考察直觉主义数学思想和康德的数学思想的联系。

布劳威尔在《直觉主义和形式主义》一文中，这样来描写直觉主义和形式主义的区别：“对数学的精确性到底存在于哪里这个问题，双方的回答不同；直觉主义说：存在于人类心智之中，形式主义者说：存在于纸面上。”①从这一段话中，我们已经看出布劳威尔的数学思想和康德的联系，因为对于康德来说，数学的精确性也并不来源于“物自体”或者不依赖于人的“理念王国”，当然更不存在于纸面上；数学的精确性来源于“直观的纯形式”，而“直观的纯形式”是存在于人的心智之中的，用康德的话说：“一般感性直观的

① 布劳威尔 L E J. 直觉主义和形式主义 .//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南 . 数学哲学 . 朱水林，等，译 . 北京：商务印书馆，2003：90.

纯粹形式将会先天地在内心中被找到”。① 另外的一个直觉主义的代表阿伦特·海廷的一段话更加彰显了直觉主义和康德哲学的亲近，以及和其他数学观的疏远。阿伦特·海廷这样写道：“但是我还得在此作一注语，这对于正确理解我们的直觉主义见解是很重要的：我们并不赋予整数或任何其他数学对象以独立于我们的思想之外的存在，亦即所谓超越的存在。……即使它们必须独立于思想的个别活动之外，数学对象从它们的本性来说还是依赖于人类思想的。”②

所以，从某种意义上讲，康德是数学中直觉主义的先驱。布劳威尔本人也很愿意承认他和康德哲学思想的联系，他说：“在康德的哲学中，我们找到了一种目前几乎被彻底抛弃的直觉主义的古老形式，其中把时间和空间看做是人类理性所固有的概念形式。对康德来说，算术和几何公理是先天综合判断，即独立于经验的、不能作分析证明的判断；这就解释了它们在经验世界和抽象世界中必然的精确性。”③

由于直觉主义者在大方向上追随康德，认为数学的对象不能独立于人类的思想，而是存在于人类的心智之中，所以在对待具体的数学问题上他们多是建构主义者（这一点和康德也是相同的）。阿伦特·海廷说：“它们（数学对象）的存在只有在它们能被思想决定的范围内才得到保证。它们之具有性质也只有在这些性质能被思想从它们中间加以识别的范围内才说得上。但是知识的这种可能性只是靠知（knowing）的活动本身才给我们显示出来。不被概念支持的

---

① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B35/A21.

② 阿伦特·海廷．数学的直觉主义基础．//［美］保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：61.

③ 布劳威尔 L E J. 直觉主义和形式主义．//［美］保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：90.

对于超越存在的信赖，作为数学证明的工具必须予以拒绝。"①从直觉主义的这一思想出发，导致的结果是：直觉主义不承认"排中律"的绝对有效性。这也很容易让人联想起康德对逻辑的无限制运用的反对。

为了清楚地理解这一点，我们看一个具体的例子。对于经典逻辑来说，排中律 $p \vee \neg p$ 是绝对有效的，在这里，无论 $p \vee \neg p$ 表示什么，它都恒真，但是对于直觉主义来说，我们却不能这样简单地断言。我们可以这样来定义一个数 n，当在 π 的无限展开式中连续出现 20 个 7 时，那么这个数等于 1，如果不出现这样的序列，那么这个数等于 0；现在考虑这样一个命题：$n=1$ 或者 $n \neq 1$。按照经典逻辑，这个命题显然为真，因为可以从排中律直接得到。但对于直觉主义来说，为了能够确定该命题的真，我们需要证明在 π 的展开式中有 20 个 7 以断言 $n=1$，或者我们证明在 π 的展开式中没有这样的序列以断言 $n \neq 1$。如果我们不能证明其中任意一个，那么我们不能断言命题" $n=1$ 或者 $n \neq 1$"必真。所以，对于直觉主义来说，在没有清楚的建构的情况下，我们不可以无条件地运用排中律。②

布劳威尔是这样来评价排中律的："在数学中，对排三原理（排中律）的普遍有效性的长期信赖，只是文明中的一种现象……直觉主义试图用两件事实来解释对这一教条的长期坚持：第一，对任一的单一论断，这一原理的显而易见的无矛盾性；第二，对范围广泛的一大群简单日常现象，全部经典逻辑的实际有效性。后一事实显然造成了非常强烈的印象，使经典逻辑原来所反映的思维活动成为根深蒂固的思维习惯，这种习惯被看成不仅是有用的，而且甚

---

① 阿伦特·海廷．数学的直觉主义基础．//［美］保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：61.

② 例子来源于：James Robert Brown. Philosophy of Mathematics. New York and London：Routledge，2008：125，有改动。

至是先天论的。排三原理的有效性域显然等同于可检验性原理和互余互反原理的有效性域的交集。"①

康德大概是不会赞同布劳威尔对待"排中律"的观点的，康德并不认为对排中律的信赖是文明的现象，康德也不会把"排中律"降格为思维习惯，康德会毫不迟疑地把"排中律"看成思维的规律，康德只是觉得"排中律"不能给我们增加什么新的知识，另外，康德反对的也许只是对"排中律"的无条件的运用。康德对"矛盾律"有过这样的言说："所以我们也必须承认矛盾律是一切分析性的知识的一条普遍的、完全充分的原则；但它作为真理的一条充分标准的威望和用途也不会走得更远。"②这里康德虽然说的是"矛盾律"，但是他对"排中律"的态度由此也可见一斑。

但是，从事情的结果上看，布劳威尔和康德没有太大的不同，因为在实际上布劳威尔是把排中律限制在了"可能经验"的范围之内。

在这里，稍微要提醒的是，布劳威尔并不是一个经验主义者，虽然他认为数学活动是心智的建构活动，但这并不是经验式的，数学是精确有效的。布劳威尔完全同意康德的和形式主义者的观点，他说："……数学规律的精确有效性是不成问题的。"③

从直觉主义的这种基本观点出发，直觉主义反对在数学中使用无限集合和超限集合，这也很符合康德的数学观，因为它们都是"实无穷集合"，不属于"可能经验"的范围；然而在希尔伯特看来，

---

① 布劳威尔 L E J. 意识、哲学和数学 .//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南. 数学哲学. 朱水林，等，译. 北京：商务印书馆，2003：109.

② [德]康德. 纯粹理性批判. 邓晓芒，译. 杨祖陶，校. 北京：人民出版社，2004：B191/A152.

③ 布劳威尔 L E J. 直觉主义和形式主义 .//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南. 数学哲学. 朱水林，等，译. 北京：商务印书馆，2003：90.

这正是康托尔(Georg Cantor，1845—1918)给我们创造的“天堂”。布劳威尔说：“在有限集领域中，形式主义公理有一个对于直觉主义来说完全清楚并且无保留同意的解释，因此这两种倾向的差别仅在其方法上而不是在结果上。然而在无限和超限集领域中，情况就大不相同，这里主要由于形式主义者应用前述包含公理(指概括公理)，引入了各种对直觉主义来说完全没有意义的概念……”①对此，外尔有更清楚的和文学性的表达，他说：“按照他的(布劳威尔的)看法和历史的研究，经典逻辑是从有限集合和它们的子集的数学抽象出来的……人们忘记了这个有限的来源，后来就错误地把逻辑看做是高于并且先于全部数学的某种东西，而终于没有根据地把它运用到无穷集合的数学上去了。这就是集合论的堕落和原罪，它正因此而受到自相矛盾的惩罚。使人惊奇的并不是这种矛盾的暴露，而是它在事情发展到这样晚的阶段才暴露出来。”②

比方说对于“连续统假设”，希尔伯特认为它是数学中最根本、最困难的问题之一，而对此布劳威尔却说：“然而对直觉主义来说，上述问题(指连续统问题)是没有意义的；并且只要它得到有意义的解释，它就可以容易地得到解答。”③

在这里，我们稍微作一下比较也许是有意义的：希尔伯特从根本上讲，和布劳威尔一样，也是一个康德主义者，但是他首先是一个伟大的数学家，他的目标是拯救整个经典数学，于是就在他力图

---

① 布劳威尔 L E J. 直觉主义和形式主义 .//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南 . 数学哲学 . 朱水林，等，译 . 北京：商务印书馆，2003：95.

② 转引自：[美]莫里斯 ·克莱因 . 古今数学思想：第四册 . 邓东皋，等，译 . 上海：上海科学技术出版社，2002：313.

③ 布劳威尔 L E J. 直觉主义和形式主义 .//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南 . 数学哲学 . 朱水林，等，译 . 北京：商务印书馆，2003：98.

拯救经典数学中的“无限”或者说“康托尔的天堂”时背离了康德，也许这是希尔伯特不愿意看到的，但事实如此；布劳威尔在对逻辑的理解上和康德存在着差别，并且他批判康德的几何观，但是他在数学哲学上却更加彻底地执行着康德的关于数学的基本原则。

布劳威尔和康德的联系还不止这些，康德认为，算术的先天综合性来源于对时间的纯粹直观，在这方面布劳威尔追随康德，而不像希尔伯特仅保留了有限的符号直观。布劳威尔说：“不管直觉主义在这一时期的数学发展之后的地位看来是怎样的软弱，通过放弃康德的空间的先天性，同时更坚定地坚持时间的先天性，它已经得到了恢复。”①紧接着布劳威尔向我们说明了如何通过对时间的直观建立整个数学，他说：“这种新直觉主义把生命的时时刻刻之破裂为——恰恰在一直被时间分割的情况下被统一起来——异质部分，视为人类心智的根本现象，把它们从情感内容中抽出来而变成数学思维的根本现象——即赤裸裸的二·一(Two-oneness)原则直觉。这种二·一原则直觉，即数学的基本直觉，不仅创造了数 1 和 2，而且也创造了一切有限序数，因为二·一原则的元素之一可以被认为是一个新的二·一原则，这个过程可以无限地重复下去；这个过程还进一步给出了最小的无限序数 ω。最后，在这个数学的基本直觉中，连通和分离、连续和离散得到统一，并直接引出了线性连续统的直觉，即介于(between)的直觉，这种连续统不可能插入新单位来穷尽，所以它永远不能被看成仅仅是一些单位的汇集。……这样，时间的先天性不仅保证了算术的先天综合判断的性质，而且也保证了几何学有同样的性质……因为自笛卡儿以来，我们已经学会通过坐标运算把所有这些几何学归

① 布劳威尔 L E J. 直觉主义和形式主义．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：93.

约为算术。”①

通过这样的新直觉主义的方法，布劳威尔认为：数学命题是先天综合命题。但是，人们在研究数学哲学时不能忘记的是：数学是一门充分发展的成熟的学科，它有它的核心部分，即经典数学，而这是不能随便裁减的，因此我们并不能从我们的哲学思想出发对数学进行随意的取舍。从这个角度来看，希尔伯特对待数学的态度更加可取，虽然他是一个康德主义者，但是他却从康德的基本哲学思想出发去拯救整个经典数学，尽管结果不太令人满意。而直觉主义却显得有些激进，希尔伯特对直觉主义的这种作法是不满的。“希尔伯特……攻击布劳威尔和外尔，说他们想扔掉他们所不喜欢的每一件东西，并且专横傲慢地颁布一道禁令。他称直观主义是对科学的背叛。”②希尔伯特也是不能容忍直觉主义对排中律的态度的，他说：“禁止数学家用排中律，就像禁止天文学家用望远镜或拳师用拳一样。”③

二、直觉主义的问题

现在我们看一个直觉主义的比较具体的困难。我们知道“零点存在定理”在经典数学中是一个极其重要的定理，它在数学分析中有着非常重要的地位，它的表述是这样的：如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么在 a 和 b 之间有一个 c，使得 $f(c)=0$。

此定理的经典证明是这样的：不失一般性，设 $f(a)<0$，

① 布劳威尔 L E J. 直觉主义和形式主义.//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南. 数学哲学. 朱水林，等，译. 北京：商务印书馆，2003：93.

② [美]莫里斯·克莱因. 古今数学思想：第四册. 邓东皋，等，译. 上海：上海科学技术出版社，2002：322.

③ 转引自：[美]莫里斯·克莱因. 古今数学思想：第四册. 邓东皋，等，译. 上海：上海科学技术出版社，2002：317.

$f(b)>0$。现在，我们建立一个集合 $S=\{x: x\in[a,b], f(x)<0\}$。很显然，这个实数集是非空有界的，根据确界定理，所以它有最小上界，设它的最小上界为 c。

根据三分律，只有三种可能：$f(c)<0$，$f(c)>0$ 和 $f(c)=0$。

(1) 假设 $f(c)<0$。如果此为真，那么总存在着一个 c 的邻域，在这个邻域里，所有的 $f(x)$ 都小于 0，当然也包括那些大于 c 的 x 的值，但这是不可能的，因为 c 为该集合的最小上界。

(2) 假设 $f(c)>0$。如果此为真，那么存在一个 c 的邻域，在这个邻域里，所有的 $f(x)$ 都大于 0，当然也包括那些小于 c 的 x 的值，但这是不可能的，因为 c 为该集合的最小上界，小于 c 的 x 的值应该小于 0。

(3) 最后只剩下 $f(c)=0$，前两个都是错误的，所以它是正确的，定理得证。

从以上的证明我们可以清楚地看到，零点存在定理的证明依赖三分律(就是说，对任意一对实数 x 和 y，都有 $x<y$，或者 $x=y$，或者 $x>y$)和最小上界定理(就是说，任意一个有界实数集都有一个最小上界)。而这两个前提对于直觉主义来说都是不可以建构的，因为直觉主义是反对像闭区间这样的实无限——实无穷集合——的，在直觉主义看来一个闭区间中的实数不是已经完成的、预先确定的、有着固定次序的序列，就像布劳威尔所说："……连续统不可能插入新单位来穷尽，所以它永远不能被看成仅仅是一些单位的汇集。"①但是这样一来，三分律和最小上界就都很难得到满意的说明，进而证明零点存在定理就显得很困难。

如果说经典数学不能被直觉主义的数学哲学很好地说明，那么

① 布劳威尔 L E J. 直觉主义和形式主义 .//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：93.

直觉主义在某种程度上就是失败的。

第六节　康德和维特根斯坦

一、维特根斯坦是如何看待数学中的一致性问题的

在这一节里，我认为有必要考察一下维特根斯坦是如何看待数学中的一致性问题的。通过这个考察，我们可以从一个侧面看到逻辑实证主义对一致性问题的反应。早期的维特根斯坦认为数学就是一个庞大的重言式，数学是无实际内容、无思想的。维特根斯坦在《逻辑哲学论》中说："数学是一种逻辑方法。数学命题是等式，因此都是伪命题。数学命题不表达思想。"①这一宣称曾是逻辑实证主义数学观上的信条。因此，早期的维特根斯坦和逻辑实证主义一样，他们都认为数学不可能不一致，原因很简单，在无实际内容的重言式里怎么会有矛盾呢？否则数学就不是无内容的重言式。但是，随着当时数学的发展，一致性问题却成了一个十分重大的数学问题。当时最著名的数学家希尔伯特就曾试图彻底地解决数学的一致性问题，使得数学有一个安全的基础。这就是我们前面多次提到的"希尔伯特计划"。既然真正的数学大家都操心起数学的一致性问题，那就说明数学有可能是不一致的。如果数学是不一致的，那么数学命题是重言式就无从谈起。当时的情况肯定引起了某些关心数学基础的逻辑实证主义者的注意和不安，比方说魏斯曼，不过他们仍然希望，如果数学是一致的，那么他们的观点只要经过一些小的修正就还是正确的。他们很希望他们的精神导师维特根斯坦能够给他们支持与信心，但总的说来，维特根斯坦令他们失望了，因为

---

① ［奥］维特根斯坦．逻辑哲学论．贺邵甲，译．北京：商务印书馆，2005：95.

维特根斯坦本人显然没有意识到整个问题的复杂性。维特根斯坦虽然还相信数学肯定是一致的，但他自己已经偏离了他早期的观点，他不再简单地说数学是重言式，因为事实也迫使他不能再这样说。维特根斯坦自己的观点也摇摆不定，这不能不让逻辑实证主义者们大失所望。

维特根斯坦开始的时候还信心满满地说："我一直在读一本希尔伯特写的论一致性的书。我有一种印象，整个问题都提错了。我想问一下，对于数学而言，它甚至可能不一致吗？我想问问那些人，你真正想干什么？你真的相信数学中隐含着矛盾吗？"①维特根斯坦认为，人们应当区分演算和闲语，真正的数学演算是不会产生矛盾的，闲语是一些在批判中可以消失的东西的名称和在演算中的引喻。② 公理的一致性和独立性只是些闲语，因此维特根斯坦坚定地说："尽可能严格地区分演算和这种闲语是非常重要的。一旦人们明白了这种区分，那么所有这些问题，例如，那些关于一致性的问题，独立性的问题，等等，都将被消除。"③但是这样的解答并不能使一个真正思考过这个问题的人满意，逻辑实证主义者魏斯曼也不能满意，因为数学公理确实可以不一致。这种不一致你也不可能通过贴上"闲语"的标签而消除它。魏斯曼提出了自己的疑虑，他说："在解析中，即在实数理论中，一致性问题反而变得尖锐了。因为，正是在这里与二律背反同种性质的非断言④概念结构浮现出来(狭义集合的上界)。也正是在这里，人们怀疑矛盾的可能性。

① [奥]维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：83.

② 参见：[奥]维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：112.

③ [奥]维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：112.

④ 就是前面我们讨论的非直谓概念。

类似地，对于集合论，你不能看清你是否将不会得出一个矛盾(选择公理和无限公理)。"[①]对此，维特根斯坦的回答是模糊的、避重就轻的，他说："解析和集合论常常被看做是一种描述某些事物的理论，而不是演算。"[②]在这里，我们可以猜想，维特根斯坦头脑里想的演算的理想模型大概是加减乘除这样的东西。但是，对于数学分析来说，确界定理是基本的，如果确界定理是会带来矛盾的，那么微分积分的演算就会失去自己的合理性根基。因此，对于分析学来说，确界定理并不是关于分析学的理论，更不是"关于数学"的无用的闲谈，而是分析学中的基本定理，与数学分析中的演算息息相关；同样对于集合论来说，选择公理和无限公理是集合论的公理，而不是关于集合论的理论和闲谈。确实，经常有关于数学的各种可以消除的理论和闲谈，但是数学的一致性问题绝不是无用的理论和可消除的闲谈。一致性问题确实是困扰数学家的一个实实在在的问题。这个问题是可以在极其清楚的意义上得到阐明的。哥德尔的工作就无可置疑地证明了这一点。其实，理论和演算并不能够清楚地区分，它们之间的界限并不是一目了然的，甚而，清楚的界限根本就不存在。即使演算与"理论和闲谈"是一个有意义的、可以操作的区分，维特根斯坦也显然把"理论"和"闲谈"用在了错误的地方。

但是，演算就不会产生矛盾吗？反证法就是从假定的前提出发凭借演算推导出矛盾来的极好的例子。魏斯曼的疑虑也正是这样。[③] 所以，说演算不会产生矛盾是一个很模糊的表达。任何演算

---

① ［奥］维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：105.

② ［奥］维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：105.

③ ［奥］维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：136.

都需要演算的前提和演算的规则。演算的前提如果有好几个，那么它们之间可能会是有矛盾的，这样通过演算当然就会得到荒谬的结果；同样如果演算的规则之间本来就有矛盾，演算同样会得出荒谬的结果。如果演算的前提是无矛盾的，演算的规则都是无矛盾的逻辑规则，只有在这种情况下，我们才可以说演算不会产生矛盾。但谁又能保证数学演算的前提是无矛盾的呢？没有数学家和数学哲学家敢于保证。希尔伯特的证明的意义恰恰就在于：从既有的数学前提出发，通过演算，如果我们得不到矛盾，那么数学就是一致的。

有时候维特根斯坦干脆否定“$0\neq0$”是一个矛盾。他借用弗雷格的类比，说公理有两种意思：（1）玩游戏时所依据的规则。（2）游戏的起始位置。而 $0\neq0$ 就像我们从起始位置出发，依据游戏的规则，玩游戏到一定时候的棋子的配置，因此维特根斯坦认为：说“棋子的这种配置是一个矛盾”是非常奇怪的，进而从这种配置倒推出“棋子的起始位置是矛盾的”也是奇怪的。[①] 维特根斯坦显然被这个象棋游戏的类比蒙蔽了。类比并不是事情本身，任何比喻也都是蹩脚的。固然说“棋子的一种配置以及棋子的起始位置是矛盾的”是奇怪的，但是，在数学中，$0\neq0$ 并不类似棋子的配置，它显然是矛盾的。如果说我们的演算、推理规则无矛盾，那么能够推出 $0\neq0$ 的数学公理系统肯定是不一致的。如果允许这样的表达式存在，整个数学也就垮台了。在数学中，如果允许 $0\neq0$ 存在，那么数学就没有任何规则可言了。我想如果维特根斯坦有理性，他肯定会同意：毫无规则的游戏不是另外一种游戏，而根本就不是游戏；毫无规则的演算不是另外一种演算，而根本就不是演算。维特

① 维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：83.

根斯坦的"那会转变成另外一种演算"的借口在数学一致性这个问题上是站不住脚的。

有时候维特根斯坦又说，规则这个词的语法指的就是矛盾不能成为规则。[1] 即使维特根斯坦是对的，又有哪个数学家可以事前保证他可以"无语法错误地"使用"规则"这个词呢？希尔伯特的一致性证明，如果按照维特根斯坦的说法，何尝不是想让大家以后可以放心地在数学中"按照规则的语法"来使用规则这个词呢？

有时候，维特根斯坦会改变"演算不会有矛盾的"看法，但又教导说："当然，演算中存在着矛盾。我的意思仅仅是：谈论'隐含的矛盾'是没有意义的。"[2]维特根斯坦的观点是"一个矛盾只有当它在的时候，才是一个矛盾"，以及人们必须先有一个寻找矛盾的程序，否则谈论隐含的矛盾都是无意义的。[3] 维特根斯坦认为只要矛盾在了，它就会很好解决。维特根斯坦说："如果在数学游戏规则之间产生矛盾，那么，找到一种补救措施将是非常容易的事。我必须要做的事情是设立一种新的规定，使它涉及那种规则冲突的情形，这样问题就解决了。"

维特根斯坦的这种观点显得很苍白，大概是呼吁人们不要去谈论什么隐含的矛盾，这没有意义，因为即使矛盾出现了，那它也很容易解决。但是，维特根斯坦依然把数学考虑简单了。数学就像一个大厦，等出问题的时候再修补并不总是一件很容易的事情。为了避免矛盾，人为地制定新规则很容易让数学丢掉自己比较核心的领

---

① 维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：156.

② 维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：136.

③ 参见：维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：84.

域，这也是希尔伯特在数学上反对布劳威尔的原因。另外，在制定公理的时候，我们当然应当力图涵盖我们的对象，同时力图避免任何可能的矛盾。维特根斯坦在这里表现得特别像一个糟糕的城市规划者：不要去谈什么隐含的问题，尽管盖房、尽管修路，出问题了再说，反正它们都好解决，管他是塌了路，死了人。

有时候，维特根斯坦会变得很不理性，他说："我想反对矛盾观念上的幽灵，这种迷信般的担忧把矛盾的发现看做是演算的毁灭。我倒想问一下，为什么会出现这样狭隘的见解呢？难道含有矛盾的演算不可能具有自己独特的魅力吗？"这时的维特根斯坦倒像一个黑格尔主义者，竟然谈起了矛盾的魅力。不过，我想，连一个真正的黑格尔主义者都会担忧演算中的矛盾，演算中的矛盾肯定没有什么魅力。

从矛盾中可以推出所有公式，这也算是逻辑常识了。但疯狂的维特根斯坦却另有解答，不过这个解答荒谬之极，简直不知所云，他说："对此，我的回答是，如果是这样，那么，这个演算由两部分组成。不是吗？一部分是发现矛盾，另一部分是容许写任何一个公式。第一部分是很有趣的事情。可以这样问一下：这一演算有终结吗？它什么时候结束！一个令人激动的问题！"[①]这个问题倒不令人激动，但它有些无聊，显然它不会终结，因为人们可以不断地写下他们所想到的任何式子。

有时候，维特根斯坦又说"你无法从矛盾中推出所有东西"。看来维特根斯坦想把逻辑也给反掉。据王浩记述，看到维特根斯坦的《关于数学基础的评论》的一些材料，连一向沉稳的哥德尔都发飙了，他说："维特根斯坦疯了吗？他是认真的吗？他有意作出一

① 维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：159.

些荒唐之极的陈述。他关于所有基数的集合所说的东西，完全是幼稚的看法。本来这跟他无关，可他非得摆出一种立场不可。例如'你无法从矛盾推出所有的东西'。"①

从以上的引述我们可以清楚地看到，逻辑实证主义者要想从维特根斯坦那里获得一些信心和支持是完全不可能的事情。就像维特根斯坦的崇拜者魏斯曼担忧的那样："维特根斯坦有出色的天赋，他常常能一眼就看到全部的东西。但我认为，与他的任何合作显然都是非常困难的，因为他常常遵从瞬间的灵感而推翻先前的构想。"②在数学哲学中我们是否应该崇拜这种天赋还是不去崇拜它呢？读者自行判断吧！

二、康德和数学中的一致性问题

因为我们后文还要详细讨论这个问题，我们在这里就不详细展开了。我们只在康德和维特根斯坦的对比中考察这一问题。康德生活的时期，数学是否一致的问题还没有浮上水面，因此康德和当时的所有科学家一样，都会认为数学是一致的。因此，就这一点而言，康德和早期的维特根斯坦会达成一致。但是他们认为数学一致的理由却完全不相同。在康德那里，数学之所以是一致的是因为数学命题是先天综合命题；而在早期的维特根斯坦那里，数学之所以是一致的是因为数学是无内容的重言式。不过与维特根斯坦完全不同的是，康德绝不会认为数学是无内容的，我们从康德对几何学的定义中能清楚地看到这一点，康德说："几何学是综合地却又是先

① 转引自：[美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009：227.

② 维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：18.

天地规定空间属性的一门科学。”[1]也就是说，我们是有一个纯直观空间作为规定的基础的。后期的维特根斯坦的数学观虽然发生了很大的变化，但对“数学是无内容的”这一点上并没有发生本质的变化。维特根斯坦爱用游戏来解说数学，对于游戏来说，什么样的游戏规则就决定着什么样的游戏，棋子是什么样的并不起任何作用，维特根斯坦说：“在下棋时，如果我说‘我有一个吓人的皇后，它的眼睛闪闪发亮’，等等，这会给我的对手以深刻的印象吗？”[2]因此，对于数学来说，墨线什么的也并不重要，重要的演算和推理规则。然而，对于数学中的实质性公理，维特根斯坦并没有清楚地阐明，不过按照维特根斯坦的思路，可以把实质性公理类比成棋类游戏中棋子的初始位置。[3] 不过这个类比，并不总是很恰当。如果说维特根斯坦认为数学中的实质性公理是完全可以形式化的，那么维特根斯坦的观点就很接近形式主义的观点。如果说公理不可以完全形式化，那么维特根斯坦就很难坚持说数学是完全无内容的。但是，对于康德来说，很显然的是，数学是不可以完全形式化的，因为比方说纯直观空间不接受任何形式化。

维特根斯坦曾经受直觉主义者布劳威尔的影响[4]，在看待某些数学问题时表现出强烈的直觉主义倾向。例如他说：“一个矛盾只有当它在那儿时，才是一个矛盾。……我认为，只要没有给出一个寻找矛盾的程序，那么怀疑我们的推理是否不可能最终导致矛盾是

---

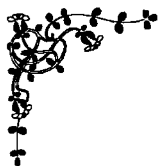
① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B41.

② 维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：126.

③ 参见：维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：83.

④ 参见：维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：39.

没有意义的。只要我能玩游戏，我就可以玩它，而且一切都是正常的。"①由此可见，维特根斯坦跟随直觉主义者，认为一个东西没有被建构出来的时候，谈论它，依靠它推理都是没有意义的。康德常被认为是直觉主义的先驱，他把逻辑限定在可能经验的做法也颇有直觉主义的建构味道。不过他们的说法不尽相同，康德说如果逻辑越过了可能经验就会导致矛盾；维特根斯坦说如果没有寻找矛盾的程序，把矛盾给建构出来，谈论矛盾就是没有意义的。



插录
维特根斯坦与维也纳小组



1889年4月26日，维特根斯坦出生于已经被同化的奥地利-犹太家庭。他是8个孩子中最小的一个。他的父亲卡尔·维特根斯坦是当时奥匈帝国最成功的钢铁大亨之一。维特根斯坦的家庭属于当时维也纳社会最富裕的家庭。维特根斯坦的父亲极其大方地支持当时的艺术家，母亲雷奥珀尔蒂娜(Leopoldine)是一个有天赋的钢琴家。维特根斯坦家的豪华住宅经常有音乐大家——像舒曼、马勒、勃拉姆斯或者施特劳斯等——出入。

维特根斯坦小时候受的是天主教教育。他自己像他的



① 维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：84.

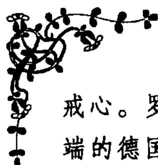


姊妹们一样有很高的音乐天赋和智商。维特根斯坦自己会演奏单簧管。他的哥哥保尔在第一次世界大战中失掉一条胳膊，但还是成为了独臂的钢琴家。维特根斯坦兄妹好像都有着一些心理问题，维特根斯坦有三个哥哥自杀。维特根斯坦本人在第一次世界大战后也常常抑郁，在人际交往中他表现出强权、常有理，但有时候又敏感脆弱和不自信。

维特根斯坦有一个远房的表哥就是出名的经济学家哈耶克(Friedrich August von Hayek)。

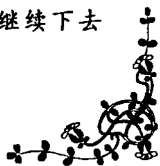
维特根斯坦一直在自己家里受教育，直到1903年。他14岁的时候才到林茨(Linz)的实科中学上学，当时他和希特勒同校，但不同班，没有他们在中学就认识的文献记录。1906年，他进入夏洛特堡技术学院(Technischen Hochschule Charlottenburg)，他本来的打算是跟从波尔茨曼(Ludwig Boltzmann)学习。据他的姐姐回忆，他关心飞机技术的问题和实验。后来，他突然喜欢上了哲学。1908年，他毕业后去了曼彻斯特大学，他想在那的工程科学系里建造一个飞机马达。不过他很快放弃了这个计划。然后，维特根斯坦参加了一个“改善飞机螺旋桨”的计划，在1911年，他还为此获得了一项专利。最后，还是哲学占了上风。维特根斯坦在1911年到耶拿拜访了弗雷格，受到弗雷格的激励，他到剑桥三一学院学习，开始深入地研究罗素的著作，尤其是《数学原理》。维特根斯坦很快就让罗素这位著名的哲学家、数学家、政治活动家和贵族知道了自己。罗素一开始并不喜欢维特根斯坦，对他存有





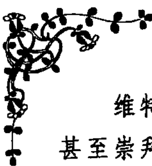
戒心。罗素在给他的情人莫瑞尔的信中写道："我这位极端的德国人(罗素把维特根斯坦误认成了德国人)在我的讲座结束后过来与我争论。他不解风情地全然反对理性，攻击理性。和他说话完全是浪费时间。"①但是还不到两周，罗素就改变了自己对维特根斯坦的看法："我开始喜欢他，他对文学很了解，音乐天赋很高，在交往中让人舒服(一个奥地利人)，我相信，他真的很聪明。"又没过多久，罗素就认为维特根斯坦是个天才。维特根斯坦也很快从罗素的学生变成了罗素的老师，他动摇了罗素的基本信念。罗素在给情人莫瑞尔的信中写道：

我们相互激发——我给他看我写的东西的关键部分。他说这完全是错的，没有意识到困难所在——他已经尝试过我的观点，而且知道这没有用。我理解不了他的反对——事实上他很不精确——但我确信他是对的，他看到了某些我没有看到的东西。要是我能看到我也不介意，但是，现在这样，让人焦虑而且相当程度毁掉了我写作的快乐——我只能根据我所能看到的继续下去，但我感到这可能完全错了，而且维特根斯坦会认为我如果这样继续下去就是不诚实的无耻之徒。②



① 参见：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：62-63.

② 转引自：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：63.



维特根斯坦虽然受到他的剑桥的同事和学生的尊敬，甚至崇拜，但他并不领情，他时常哀叹说剑桥的同事和学生不了解他。戈德斯坦对维特根斯坦的个性与行为有一个有趣的评说，我们不妨摘录如下：

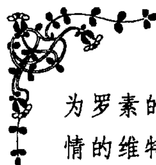
维特根斯坦的个性力量、对哲学的革新态度以及消除同时代人假定中的谬误时那神圣的严肃（这与他作为维也纳人对旧传统的颓废枯竭感很有关系），改变了英美哲学。像罗素这位剑桥哲学家以及围绕着维特根斯坦的哲学系学生不必理解它就能"确信他是对的"。他才华横溢，在极端而令人敬畏的苦行个性的背景下如神谕般散发出来（即使不精确），表现得极富感染力，让人不由自主地信服。①

从 1912 年开始，维特根斯坦开始撰写他的哲学著作《逻辑哲学论》。在第一次世界大战期间，维特根斯坦在战壕里还在继续撰写，到 1918 年夏天完成。1921 年，在《自然哲学年鉴》杂志上发表了一个错误颇多的版本。1922 年最终以双语出版，标题就是我们今天所熟知的：*Tractatus Logico-Philosophicus*（逻辑哲学论）。

从成书的时间和出版的时间上我们大概也可以猜到，该书的出版经历了很多困难，事实也是如此。最后还是因



① ［美］戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：63-64.



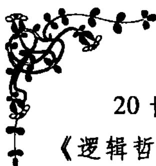
为罗素的序言，《逻辑哲学论》才找到了出版商。但不领情的维特根斯坦却讨厌这个序言，尤其是其被翻译成德文后，他给罗素写信道："显然，你的英语文体的一切优雅都在翻译中失去了，留下的只有肤浅和误解。"①这无疑是对罗素极大的贬低，维特根斯坦显然没有承认罗素的任何学术能力，因为维特根斯坦认为罗素对自己的著作的理解除了肤浅就是误解，他只承认罗素的英文问题还算优雅。罗素和维特根斯坦的关系从此冷淡了很多。罗素后来曾说："维特根斯坦傲慢自大。"②

离开英国后，维特根斯坦回到了奥地利。维特根斯坦可能受托尔斯泰(Leo Tolstoi)的影响决定做教师。他把他巨大的财产都分给了自己的兄弟姐妹们，其中的一部分他捐给了当时年轻的艺术家，其中有罗斯(Adolf Loos)、特拉克尔(Georg Trakl)和里尔克(Rainer Maria Rilke)。维特根斯坦确实做了一段小学教师，他还为人民学校(Volksschulen)编写和出版了一本在当时看来颇为进步的字典。但在维特根斯坦当教师期间，他与学生的父母关系紧张。1926年4月，他击打了一个11岁男孩的头部，致使小男孩昏厥。在官方采取措施以前，他递交了辞呈。此后，维特根斯坦在一个修道院做过园丁，住在工具棚里。他还考虑过当修道士，但最后听从了修道院院长的建议离开了。



① [美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：65.

② [美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：65.



20世纪20年代末，维特根斯坦又回到了哲学。他的《逻辑哲学论》对维也纳小组产生了非同一般的影响。逻辑实证主义者认为维特根斯坦的《逻辑哲学论》给他们提供了他们所寻找的纯洁的新基础。维也纳小组开始一起研究《逻辑哲学论》，并且逐项研究。从此，他们星期二晚上的例会都用来阅读维特根斯坦，他们不是读了一次，他们读了两次，总共花了大半年时间。①

但是维特根斯坦本人并不参加例会。小组中只有石里克和魏斯曼有机会与维特根斯坦定期会面。魏斯曼最为痴迷维特根斯坦。魏斯曼虽然也抱怨维特根斯坦看法多变，很难合作，但是如果维特根斯坦的看法变了，他的看法也跟着变。每个星期二例会，他都会给小组的其他成员带来维特根斯坦的最新观点。就这样，维特根斯坦的思想在小组中传播。

就像在剑桥时维特根斯坦对罗素和其他学生的影响一样，他对维也纳小组的影响也很难得到合理的解释。维也纳小组的成员正是因为崇尚科学、崇尚清晰，拒绝形而上学的共同志向才聚到了一起，照理说，他们的内心都应反感对秘、反对科学外的权威。但是尽管这一切，他们都衷心信服维特根斯坦这个有时不精确、有时有些神秘主义倾向的权威。

石里克崇拜维特根斯坦。从1926年秋起，维特根斯



① 参见：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：65.

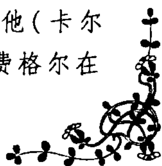


坦住在维也纳。维特根斯坦的姐姐斯通勃勒在社交界和知识界都很有名，正是她促成了一次维特根斯坦和石里克的会面。据石里克的夫人回忆：

斯通勃勒夫人的邀请使他欣喜异常，他热心期待着会面的到来，而这次石里克的期望和希望没有落空。我再一次强烈地感受到了他对维特根斯坦的崇拜。他带着一种狂喜作了回复，说的并不多，我感到我也不必多问。①

石里克的学生费格尔后来的记述也证实了这一点："石里克崇拜他，魏斯曼也是这样，他像维特根斯坦的其他的信徒一样，甚至开始模仿他的手势和说话风格。"②

维特根斯坦权威感很重，不容别人和其争辩，也不容别人对他的权威进行挑战。卡尔纳普在自己的自传中回忆了小组如何与维特根斯坦就是否"可能谈论语言表达"这个问题的搏斗。有一次，卡尔纳普坚持要求维特根斯坦阐明这一点，结果被永远禁止在有维特根斯坦在的场合出现。③ 有一次，维特根斯坦对费格尔说："如果他(卡尔纳普)嗅不到，我帮不了他。他完全没有鼻子！"费格尔在



---

① 转引自：维特根斯坦．维特根斯坦与维也纳学派·序言．徐为民，译．孙善春，校．上海：同济大学出版社，2004：6-7.

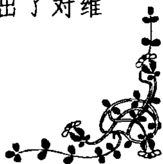
② 转引自：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：72.

③ 参见：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：71.



这时却表达了自己的真情实感，说他对卡尔纳普这位精确和严谨的思想家有着无限的钦佩，结果，他也被赶走了。①

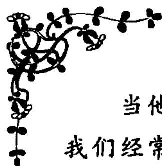
虽然维特根斯坦经常对逻辑实证主义者们的“嗅觉能力”表示失望和愤怒，但是他们总是回应以崇拜。女数学家陶斯基曾和维也纳小组待过一段时间，她曾经这样写道：“维特根斯坦是团体的偶像，我可以证实这一点。引用一下他的《逻辑哲学论》就可以平息一场争论。”②这是“一句顶一万句”的欧洲版。在维也纳待过的艾耶尔回到英国，在给自己的朋友柏林写信时也说：“维特根斯坦对他们所有的人来说就是神……(罗素)只能算是耶稣(维特根斯坦)的马前卒。”③读到这样的文字让人感慨！我们很难相信这群崇拜者是逻辑实证主义者。面对维特根斯坦的时候，他们既忘记了逻辑又忘记了实证，只剩下了在人类历史中有着悠久传统的对权威崇拜的经验。不过，他们毕竟还是经验主义者，因为他们保留着对权威崇拜的经验。实证主义者中最清醒的卡尔纳普在自述里也表现出了对维特根斯坦的近乎宗教般的敬畏：



① 参见：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：72.

② 转引自：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：74.

③ 转引自：[美]戈德斯坦．不完备性：哥德尔的证明和悖论．唐璐，译．长沙：湖南科学技术出版社，2008：74.

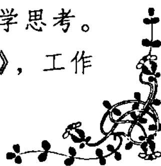


当他对某些特定的哲学问题形成看法时，在那个时刻我们经常能感觉到他内心的挣扎，试图穿透黑暗到达光明的挣扎，伴随着强烈而痛苦的紧张，甚至能在他那极具表现力的脸上看到。当最后，有时通过艰难的努力，他的答案涌现出来，他的陈述呈现在我们面前，就像一片刚刚创造的艺术品或神灵的启示……他给我们的感觉就好像他通过神启的灵感得到洞见，使我们情不自禁地觉得任何冷静理性的评论或分析都是一种亵渎。

1929 年，维特根斯坦作为哲学家回到了剑桥，首先在罗素和摩尔那通过对《逻辑哲学论》的口试获得了博士学位。由于他得到的遗产分给了兄弟姐妹或捐赠给了艺术家，维特根斯坦一开始在剑桥的经济状况很糟糕，只能靠奖学金为生。1930 年初，维特根斯坦得到了教职。从 1936 年开始，维特根斯坦和他的同性恋爱人斯金纳尔(Francis Skinner)做过多次旅行，他们到过挪威、维也纳和俄国。

1938 年，奥地利被纳粹德国吞并，维特根斯坦成了德国人，按照德国的纽伦堡法律，他应该被认为是犹太人。这可能是导致维特根斯坦最终放弃欧洲的原因。1939 年，维特根斯坦接替了摩尔(George Edward Moore)成为剑桥的哲学教授，很快，他加入了英国国籍，在教授的职位上他一直待到 1947 年。在 20 世纪 30 年代，维特根斯坦开设了很多课程，做了很多宣讲课，继续他的哲学思考。

大概从 1936 年开始，他开始撰写《哲学研究》，工作





大概持续到1948年。这部著作是维特根斯坦自己完成的，不过直到1953年，他死后该书才出版。《哲学研究》的出版使维特根斯坦获得了世界性声誉。这部著作对哲学史的影响比《逻辑哲学论》还要持久，它被认为是分析哲学的主要著作之一。在40年代，还出现了维特根斯坦对数学基础的评论手稿。

第二次世界大战期间，维特根斯坦又投身于实际工作。他在伦敦医院里做自愿护理员。1943年，他作为实验助理加入了一个医疗研究小组。1944年，维特根斯坦又重新在剑桥授课。

1951年4月29日，维特根斯坦死于癌症。由于维特根斯坦拒绝去英国医院，他死前的几周是在他的医生家度过的。在维特根斯坦去世的前一天，医生的太太告诉他，他的英国的朋友们要来看他，维特根斯坦说："您告诉他们，我拥有非凡的一生。"①



小　　结

通过本章第一节和第二节的论述，我们已经阐明了我们的观点：数学命题不可能纯粹地建立在分析的基础上。即使像很多人认为的那样：数学可以还原为集合论，数学也不是自身"纯粹分析地真着"，因为集合论自身并不是纯粹分析的，就像我们在上文看到

① 德语原文："Sagen Sie ihnen, dass ich ein wundervolles Leben gehabt habe."

的，它有自身的公理，有不定义的初始概念，最后集合论也面临着自己的一致性问题，以及在一致的情况下存在不同构的模型解释问题。

哥德尔在《罗素的数理逻辑》一文中，对什么是“分析性”作了两种不同的解释：“……应该注意到分析性可以在两种意义上来解释。第一，它可以具有纯形式意义，即出现的词项能被定义(或者作出显定义，或者通过从含有它们的语句中将它们消去的规则)，使得公理和定理成为同一律的特殊情形，而不可证命题成为这条定律的否定。在这种意义上，甚至整数数论也可被证明是非分析的……”[①]这里说的正是逻辑实证主义所希望的数学应该具有的分析性，因为他们认为整个数学都是一个庞大的重言式，当然数学的公理和定理都是同一律($A=A$)的特殊情形。但是就像我们在本章中看到的那样，数学不可能具有这样的分析性，诚如哥德尔所言：“在这种意义上，甚至整数数论也可被证明是非分析的。”

哥德尔对分析性的第二种解释是：“一个命题称为在第二种意义上是分析的，如果‘由于出现在其中的概念的意义’它是成立的，其中这个意义也许可以是不可定义的(即不可归约为任何更基本的东西)。”[②]哥德尔本人主张数学应该具有第二种分析性，用我们的话说就是：数学不具有彻底的分析性，因为数学中存在这样的概念，它的意义不被归约为任何更基本的东西，所以它自身也并不重言地真着。但问题是这些概念是哪来的呢？哥德尔是一个柏拉图主义者，在他那里，这些概念就存在于柏拉图王国里，人们可以用某种方式直觉(直观)到它们。而我们从康德的哲学出发，对柏拉图主义有所保留，原因是柏拉图主义的神秘主义倾向，尽管柏拉图主

① 库尔特·哥德尔．罗素的数理逻辑．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：540.

② 库尔特·哥德尔．罗素的数理逻辑．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：540.

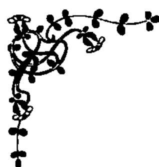
义在另外一种意义上强有力地表达了：数学命题是先天综合命题。

在数学哲学上，一般人们认为，希尔伯特是康德的反对者，而布劳威尔是康德的支持者。其实，这是不符合实际的。我们甚至可以这样说，在数学哲学上，希尔伯特和布劳威尔都是康德主义者。他们两人都不是柏拉图主义者，他们内心中都装着康德的告诫去试图给整个数学建基。但结果是有趣的和令人深思的：如果希尔伯特能够成功，那么希尔伯特在实际上就成了逻辑实证主义的支持者。历史也表明了这一点，逻辑实证主义确实从希尔伯特和他的后继者那里吸取营养，坚固自己的观点。布劳威尔曾经清楚地表达过数学命题是先天综合命题的观点，但是布劳威尔在对逻辑的理解上却与康德有一定的不同，并且他也坚决地反对康德的几何观。在这里，我要特别提醒的是：他们两人都与康德有一个很大的不同，虽然布劳威尔反对实无穷集合，而希尔伯特赞同实无穷集合，但是无论是布劳威尔还是希尔伯特，他们都承认算术中的“数”和几何中的“点”可以建立一一对应的关系。而康德认为，“数”对应的是“量”；“点”只是一些边界的标记。[①] 不承认实无穷集合，同时又承认“数”和“点”的一一对应，这是直觉主义在面对经典数学时不能合理地为自己辩护的根源。

对于这两个伟大的康德主义者我们应该感谢他们什么呢？我们应该感谢的东西很多！但有趣的是，我们首先应该感谢的是：他们数学哲学的不成功和他们对康德的偏离。如果他们没有偏离康德，那么他们的失败也就是康德数学哲学的失败。正是因为他们的不成功和对康德的偏离使我们认为继续研究康德的数学哲学是必要的，即使是在现代数学高度发展的今天。

---

① 参见：[德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A170/ B212.



插录
布劳威尔小传



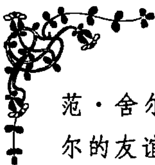
布劳威尔(Luitzen E. J. Brouwer)1881 年 2 月 27 日生于欧福尔西(Overschie)，他是荷兰数学家。他创立了基本的拓扑学方法和概念，证明了重要的拓扑学定理。布劳威尔不动点就是因其而得名。他通过创立直觉主义使自己成为数学基础争论的中心人物。

布劳威尔后期的工作对于建构主义数学的发展是划时代的。他对逻辑本性的观点催生了直觉主义逻辑这个学科。在他的数学哲学的著作里，他研究数学和哲学的关系，他尤其关心存在命题和排中律在数学证明中的运用。

布劳威尔是三个孩子中的老大，父亲是教师。布劳威尔 1897 年中学毕业，进入了阿姆斯特丹大学学习。在阿姆斯特丹大学的数学和自然科学系里，当时有很多名人在那里工作，像物理学家范·德·瓦尔(Johannes Diederik Van der Waals)、生物学家德·弗里斯(Hugo de Vries)。数学宣讲课主要是由考尔特维克(Diederik Johannes Korteweg)来上。就是考尔特维克后来接受了布劳威尔的博士论文，虽然他的才华很让布劳威尔惊叹，但他并没有给布劳威尔以灵感。

布劳威尔也有一些学生朋友，其中引人注目的是诗人





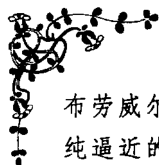
范·舍尔特玛(Carel Adema van Scheltema),他和布劳威尔的友谊持续了一辈子。布劳威尔自己也写诗,他始终对文学抱有兴趣。1904年,23岁的布劳威尔在获得学位后学习了伯兰德(G. J. P. J. Bolland)的哲学。1905年,他在戴尔福特(Delft)作了一系列的讲座。讲座的内容却是关于道德和神秘主义这样的话题,关于静心养性、罪责的消除以及语言。后来这些内容以《生活、艺术和神秘主义》为名的书出版。

既是哲学家又是数学家的玛努理(Gerrit Mannoury)对布劳威尔影响很大。私人讲师玛努理使布劳威尔对集合论的新发展以及皮亚诺和罗素的逻辑记号产生了极大的兴趣。后来,布劳威尔在自己的博士论文《数学的基础》中详细地讨论了逻辑和数学的区别,只是一小部分涉及了数学结果。

1908年,布劳威尔发表了论文《逻辑原理的不可信》,在这篇论文里他第一次清楚地表达了自己拒绝排中律。

布劳威尔1908年在罗马参加了一次国际数学会议。此后,布劳威尔就开始了在自己的一生中在拓扑学方面的创造期。其实,他在几何学方面发表论文已经好几年了,不过现在他决心全心投入,数学的基础稍后再研究。布劳威尔的论文《拓扑分析》紧跟当时集合论拓扑学的发展。布劳威尔补充和改善了舍恩弗里斯(Arthur Moritz Schoenflies)的工作。此前他发表了《二维流形上的李群和向量场》的论文。这些工作又导致了他对映射度的发现。他证明了区域不变量定理,并把约当曲线定理推广到了 n 维。





布劳威尔还澄清了维度的概念。此外布劳威尔还发展出单纯逼近的方法，该方法著名的结果就是布劳威尔不动点。

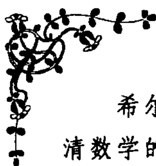
布劳威尔的许多论文都发表在德国著名杂志《数学年鉴》上。当时希尔伯特是该杂志的最重要的编辑，并且是当时最重要的数学家。于是，他们之间建立了友谊。

1912年，31岁的布劳威尔成为阿姆斯特丹大学的教授。此时，他又捡起了他在博士论文中所阐发的思想。他讲授直觉主义和形式主义，并且他反对当时越来越强的形式化倾向。他尤其攻击策梅洛(Ernst Zermelo)的集合论的公理化。1914年，布劳威尔成为《数学年鉴》的编辑，很遗憾，由于繁忙的编辑和教学工作，布劳威尔的数学研究工作停滞了。他又转向了自己的哲学工程——记号学(Signifik)，该工程是由外尔比(Victoria Lady Welby)创立的，而他们团体的精神导师是玛努理，布劳威尔的朋友和老师。记号学追求一种全面的语言改革，但没有成功。

在第一次世界大战期间，布劳威尔根据直觉主义的原理建立起一种集合论。他的集合论不依赖于排中律。布劳威尔试图在一个建构主义的基础上重新给数学分析奠基。他后来的工作都建基在这一研究之上。

外尔也做过类似的尝试，他试图不用戴德金(Richard Dedekind)分割来建构连续统。布劳威尔的论文使外尔很振奋，外尔开始为布劳威尔的建构主义基础辩护。由于外尔的推波助澜，数学基础之争爆发了。以一篇极富挑战性和启发性的论文《论数学基础的新危机》，外尔使布劳威尔的思想广为传播。



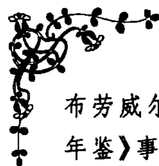


希尔伯特对这一思想警觉了，他认为自己有义务去澄清数学的逻辑基础。他发展出自己的证明论。希尔伯特认为对排中律的使用是理所当然的。存在命题的可建构性并不是十分重要的，重要的是公理系统的一致性。

在20世纪20年代，布劳威尔继续试图用新方法去证明数学中的经典结果，并对它们进行直觉主义的改写。布劳威尔还设计了一种新的函数论。但是第一次世界大战后的国际科学政策却给布劳威尔准备好了危险。布劳威尔先前曾试图取消国际研究协会（Conseil International de Recherches）和国际数学联合会（Union Mathématique Internationale）对德国科学家的封锁。1928年，在意大利博洛尼亚的由这两个协会举办的一次国际会议上，布劳威尔呼吁受邀的德国科学家进行反封锁。这件事却惹恼了希尔伯特，他认为这是对德国人自己的事情的干预，并会对科学事业带来损害。

紧接着，由于这件事情作导火索，再加上二人在数学基础上的分歧，1928年秋天，布劳威尔收到希尔伯特的信。希尔伯特告知这位“亲爱的同事”，“从今往后，我们将放弃与你在编辑《年鉴》上的合作，因此也把你的名字从刊名页上删去”。辞退信令布劳威尔深受打击，他病了好几天，同时还发烧。他拖着病体给同事写信，声称辞退信是“希尔伯特在理智不健全的时候发出的”。他甚至给希尔伯特夫人写信，希望她能让丈夫改变想法。但他辗转得到的答复是，在这件事情上，希尔伯特不受任何人影响。爱因斯坦并不赞同希尔伯特辞退布劳威尔，他拒绝在



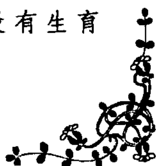


布劳威尔的辞退信上签名，但也无能为力。在经过《数学年鉴》事件后，布劳威尔退出了数学界，也几乎不再发表论文。他参与地方政治，为一次私人投资的失利而奔忙。

第二次世界大战后的布劳威尔在阿姆斯特丹也受到排挤。他自己创建的杂志他也不再能发挥影响，研究中心的建立也和他没有了关系。1951 年，70 岁的布劳威尔退休。

布劳威尔是很多科学协会的成员，其中著名的有伦敦皇家学会，他还是奥斯陆大学和剑桥大学的荣誉博士。

布劳威尔于 1966 年 12 月 2 日死于一场车祸。布劳威尔和自己的夫人豪尔（Lize Brouwer-de Holl）没有生育子女。



第二章

在现代数学背景下的康德的数学哲学

虽然我们在上一章中看到，很多在数学哲学中很有影响力的人物都与康德有着这样和那样的联系，但是他们和康德相同的一面却经常被现代的学者所忽略，而不同的地方却经常被放大。特别是涉及康德的比较具体的数学观时，人们看到的、听到的更多的是对康德数学观的蔑视和不屑的文字和声音。这样的文字和声音我在“引言”里已经引用过，在这里就不再重复引用了。

在这一章里，我试图为康德的数学哲学提供一些相对较强的辩护。我们把论述的重点放在康德的几何观这一方面。这样做不仅仅是因为康德的几何观在康德的数学哲学中特别重要，而且还因为康德的几何观自从近代以来受到比他的算术观更强烈的攻击。

第一节　康德的几何观及其面临的问题

一、康德的几何观

我们首先考察康德的几何观。康德关于几何学的基本观点大致可以作如下的列举：

（1）几何学是先天的，而不是经验的。

康德说：“几何学是综合地却又是先天地规定空间属性的一门

科学。那么，空间的表象究竟必须怎样，才会使有关它的这样一门知识成为可能？它必须本源上就是直观……但这种直观又必须是先天的，即先于对一个对象的一切知识而在我们心里，因而必须是纯粹的而不是经验性的直观。"①

在这里，对于理解康德意义上的几何学的先天性来说，理解康德的"纯粹直观"是非常重要的。就像我们在上文看到的，柏拉图主义者也认为几何学是先验的，但是它的"先验性的保证"来源于不依赖于人的"理念王国"；而康德的几何学的先验性则源于"纯粹直观"。在康德的哲学中，"纯粹直观"是一种很理想化的东西，与我们普通所理解的经验没有任何关系，但是根据康德的理论，它却不是什么概念范畴，它不属于"知性"，它本质上与"感性"相关联，或者准确地说，它是感性经验的可能性条件，所以它与柏拉图的理念是不同的。

（2）几何学的综合的性质来源于"空间纯直观"。

康德说："……纯粹几何学的任何一个原理也不是分析的。两点之间直线最短，这是一个综合命题。因为我的直线的概念绝不包含大小的概念，而只包含某种性质。所以'最短'这个概念是完全加上去的，而绝不能通过分析，从直线这个概念中引出来。因此在这里必须借助于直观，只有凭借直观这一综合才是可能的。"②

这里，康德用清楚的例子向我们展示了纯粹直观对于几何命题的综合性质的贡献。就像康德所说，由这个命题出发，我们还可以分析地（根据矛盾律）得到其他综合命题。比方说：三角形两边之和大于第三边。当然，按照康德的理论，我们也可以直接纯粹直观出这一命题。

---

①　[德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B41.

②　[德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B17.

(3) 几何学中分析性的原理之所以是有效的，是因为它们能在直观中体现出来。

对于这一点，我们先来看一下康德自己的论述："几何学作为前提的少数几条原理虽然确实是分析的，并且是建立在矛盾律之上的；但它们正如那些同一性命题一样，也只是用于方法上的连接，而不是作为原则，例如 $a=a$，即全体与自身相等，或 $a+b>a$，亦即全体大于其部分。并且即算是这些原理本身，尽管仅仅按照概念来说是有效的，但它们在数学中之所以行得通，也只是因为它们能在直观中体现出来。"①

简单地说，在这里康德是想把逻辑的有效运用限定在可直观的范围之内。

二、康德的几何观所面临的问题

在现代数学的背景中，康德的几何观确实还面临着种种问题，这些问题也并不是不重要的。我们用我们的语言把这些问题总结如下：

第一，如果说几何学是规定空间属性的一门科学，那么康德的几何观在非欧几何和高维几何面前如何给自己提供恰当的辩护呢？康德有些地方的对空间和几何的论述清楚地展示了：(1) 康德并没有给非欧几何留下余地。康德在论述直观在定理推导中的作用时曾举过这样的例子："且让我们看这条定理：'凭两直线不能围住一个空间，因而不能有任何图形'，让我们试着从直线的概念和'两'这个数目的概念中把这个定理推导出来……你的一切努力都是白费，你将发现你不得不求助于直观……"②先不论直观在定理推导

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B17-B18.

② [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B65/ A48.

中的重要性，这个例子本身清楚地表明了：康德心目中的几何学是欧几里得几何学。但是，现在我们知道，在椭圆几何中，两条直线可以围住一个空间。也许你会争辩说，这取决于我们如何理解直线，诚然，我们可以把“欧几里得式”直线理解成“测地线”的一个特殊的种类，从而欧式空间的两条直线并不能围住一个空间。但是，这只是表明了：非欧几何不能构成对欧几里得几何的反驳，却并不能为康德辩护说：我们的空间就是欧几里得空间。(2) 康德也没有给高维几何留下余地。康德说：“……几何学的定理全都是无可置疑的，亦即与它们的必然性的意识结合在一起的，例如空间只有三个量度。”①从康德的几何和空间的对应关系来看，几何学的维度最多也只能有三维了。

第二，如果承认了几何学是综合的，不是分析的，那么几何学从何种意义上讲是先天的？如果人们跟随康德，把“先天的”理解成“必然的”和“普遍的”，(康德：“……必然性和严格普遍性就是一种先天知识的可靠标志，而两者也是不可分割地相互从属的。”②)那么几何学的必然性和普遍性就需要另外的辩护，因为在现代数学中存在各种各样的几何学，我们凭什么说每种几何学都是普遍和必然的呢？或者说各种几何学在何种意义上是普遍的和必然的呢？

第三，几何学到底是不是规定空间属性的一门科学？对于康德的几何观来说，这是一个根本性的疑问。如果说几何学可以成功地建立在现代集合论的基础上，我们还有什么权利说几何学是规定空间属性的一门科学呢？这一点牵涉到现代几何观和康德几何观的本质上的分歧，但在本章中我们并不准备详细讨论，我们把它放在后

---

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B41.

② [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B4.

面的章节。

第二节 康德的空间

如前所引，康德认为，几何学是综合地却又是先天地规定空间属性的一门科学。为了能够更好地讨论这个问题，我们有必要先来考察康德对空间的理解。

康德说："空间不是什么从外部经验中抽引出来的经验性概念。因为要使某些感觉与外在于我的某物发生关系(也就是与在空间中不同于我所在的另一地点中的某物发生关系)，并且要使我能够把它们表象为相互外在，相互并列，因而不只是各不相同，而且是在不同的地点，这就必须已经有空间表象作基础了。因此空间表象不能从外部现象的关系中由经验借来，相反，这种外部经验本身只有通过上述表象才是可能的。"①

简单地说，康德这里的意思就是：空间不是一个经验性概念，它是外部经验的前提。没有了空间表象，我们根本就不可能有外部经验。因此，康德强调说："因此空间表象不能从外部现象的关系中由经验借来，相反，这种外部经验本身只有通过上述表象才是可能的。"

所以在康德看来："空间是一个作为一切外部直观之基础的必然的先天表象。对于空间不存在，我们永远不能形成一个表象，虽然我们完全可以设想在空间中找不到任何对象。"②

康德进一步阐述说："空间绝不是关于一般事物的关系的推论

---

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B38.

② [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A24/B39.

的概念，或如人们所说，普遍的概念，而是一个纯直观。"①

什么是纯直观呢？

康德也给我们讲了如何纯粹直观具体物体的操作方法，他说："假如我从一个物体的表象里把知性所想到的东西如实体、力、可分性等都除开，同时又把属于感觉的东西如不可入性、硬度、颜色等也除开，那么我从这个经验的直观中还余留下某种东西，即广延和形状。这些东西属于纯粹直观，它是即算没有某种现实的感官对象和感觉对象，也先天地作为一个单纯的感性形式存在于内心中的。"②

既然空间是一个纯直观，那么空间这种纯直观与我们的"具体的纯直观——具体的纯形式"有什么关系呢？

康德是这样回答的："这些部分也不能先行于那唯一的无所不包的空间，仿佛是它的组成部分（由它们才得以复合起来唯一的空间）似的，相反，它们只有在唯一空间中才能被设想。"③

看来，康德并不禁止人们谈论部分空间，或者说具体的空间形状。他的意思只是说：不是先有很多具体的空间形状，然后我们把它们拼合成一个唯一的空间，而是在我们直观这些理想的形状时，已经以"空间"作为这些具体直观的可能性条件了。

基于这种理由，康德说："空间被表象为一个无限的给予的量。"④

我认为，注意到康德的这一观点是特别重要的。人们通常认

---

① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A25.

② ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B35/A21.

③ ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A25.

④ ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B40.

为，康德只承认"潜无限"，的确，从把可靠的知识限定在"可能经验"的范围来看，康德是只承认"潜无限"的合法性的，而柏拉图意义上的"实无限"或者现代数学中的"实无穷集合"只能作为理念引入，在人类的认识中，只起着范导性的作用，它是要受到限制和批判的。但这一切并不能阻止我们说，我们对"无限"有一个纯直观，因为在康德那，纯粹直观是不需要人类的肉眼的，或者其他的仪器的，它的纯粹形式先天地在内心中，所以空间作为纯粹直观，它的纯粹形式也先天地在内心中。"无限"只是先天地属于纯直观的，但它并不用来断言某个具体的经验是无限的或者某个具体的集合是无限的。

第三节　对康德几何观所面临的诘难的回答

一、康德与"非欧几何和高维几何"

现在，我们来考察上面提出的第一个问题：如果说几何学是规定空间属性的一门科学，那么康德的几何观在非欧几何和高维几何面前如何给自己提供恰当的辩护呢?

人们一般是这样来总结康德的空间和几何学的关系的：(1) 几何学是综合地、并且是先天地规定空间属性的一门科学。(2) 欧几里得几何学就是这个唯一的几何学。(3) 我们的空间于是也就是欧几里得空间。

这个总结并没有太歪曲康德的空间——几何观，但是我们却在这里看到了一个康德的思维的跳跃，因为在康德那里，空间的重要特征是：空间是其他外部直观的可能性条件；空间被表象为一个无限的给予的量。如果我们暂时不去顾及康德在先验哲学上的其他讨论，并且允许我们用更数学的话来解释，那么康德的空间其实只具有两个基本的条件：连续的和无限的。说它是连续的，按照康德的意思，是因为我们根本无法设想不存在空间，虽然我们可以设想在

空间中无物，换句话说，“空间表象”是没有空隙的，因为那些空隙只能还是空间。此外，空间表象不能从外部现象的关系中由经验借来，所以外部的离散现象对空间的连续性也没有任何影响，空间总是那个唯一的空间(空间本质上是唯一的①)。用康德自己的话说，就是：“空间和时间都是 quanta continua(拉丁文，连续的量)。”②现在，人们可以清楚地看到，符合这样条件的空间并不都是欧几里得空间，此外，欧几里得空间除了满足连续性和无限性以外还拥有着其他的具体的规定，它和康德自己所描绘的空间之间并不存在等同关系。德国著名的康德专家奥特弗里德·赫费在他的著作《康德》中也清楚地指出了康德的这一思维跳跃，他说：“数学家通过想象和设定把单纯的直观形式表象为一个具有某些结构的独特的对象，并且在纯粹几何学范围内独立于经验地对这些结构进行探索。在作为先验条件的空间和作为几何学对象的空间之间存在着不可消除的差别。”③

我认为，正是由于康德的这种跳跃(把只具有连续性和无限性的“纯直观空间”等同于欧几里得空间)才遭到了种种非难，所以，后来非欧几何的出现一般被看成是对康德几何观的重大打击。布劳威尔，一个康德算术观的支持者，在《直觉主义和形式主义》一文中这样写道：“但是对康德理论的最严重的打击是非欧几何的发现，这是从一组公理发展而来的一个一致性理论，这组公理与初等几何(指欧几里得几何)的不同之处仅在于把平行公理换成它的否定。……从而，不仅认为我们的经验空间具有初等几何的性质是不

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A25.

② [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A170/ B212.

③ [德]奥特弗里德·赫费．康德：生平、著作与影响．郑伊倩，译．北京：人民出版社，2007：69.

可能的，而且要求那种对我们的经验空间为真的几何学也是毫无意义的。"①从这一段我们可以清楚地看到：只有把作为纯直观的空间等同于欧几里得空间时，非欧几何才能对康德的几何观形成真正的打击。

历史地看，(我们先不管现代数学对几何基础的讨论)没有纯直观就没有真正的几何学，因为真正的几何学必然要求对它的对象进行纯粹化、理想化。就像康德所说，几何学不可能是经验性的。正是基于纯直观，"无限"、"连续"以及各种各样的"理想图形"才"呈现"在我们面前，可以这样说，从某种意义上讲，如果没有纯直观，几何学就永远摆脱不了自己的经验性的起源，就像GEOMETRIE(德语)这个外文名字的词源含义所表达的，它只是对土地的测量。

但是纯直观就真的意味着几何学的全部了吗？显然不是！比方说，任何一种度量几何学都包含着一种对度量的规定，而每一种度量的规定并不能靠直观获得，无论我们的直观是多么的纯粹。比方说，在欧几里得几何学那里，图形间或者图形各部分间的量的比例关系是不可以精确直观出的。你能精确地直观出圆的周长和直径的比是 π 吗？显然不能，人类最初甚至不能确定这个比值是不是一个常数，因为它可能根据圆的大小不同而发生变化。就像康德所说，直线的概念绝不包含大小的概念一样，我们也可以说，直观虽然有时候能给出谁大谁小，但绝不会给出它们精确的值或比例。

也许有人会说，我们确实不能直观出所有精确的值和比例，但是我们最终可以把它们还原到纯直观之上。这也是不可能的。让我们来看一个具体的例子。在欧几里得几何学中有这样的命题：三角形的内角和是180度。我们如何得到这一结果呢？通常的证明需要

① 布劳威尔 L E J. 直觉主义和形式主义 .//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南 . 数学哲学 . 朱水林，等，译 . 北京：商务印书馆，2003：92.

平行公理，然而平行公理并不是一个自明的公理，它更多地是一个对“度量”的规定，虽然这一点并不是显然的。正因为这个原因，我们可以对“两条线的平行”进行不同的规定或者放弃它。数学的历史向我们展示了，如果我们对平行公理进行不同的处理，就会产生不同的几何学，三角形的内角和在不同的情况下可以不等于 180 度，和 180 度的差取决于不同的规定。只有在对平行公理进行特定的“度量规定”的前提下，三角形的内角和才是 180 度。

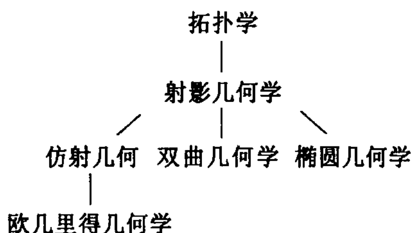
从以上的分析我们可以看出，作为“纯直观”的空间对于欧几里得几何学来说，并且对于其他众多的度量几何学来说，都是至关重要的，但是几何学并不能彻底还原成“纯直观空间”，因为，一般来说，几何学还包含着除“纯直观”外的其他的理想化规定。

所以，在本书里，我更倾向于这样的观点：非欧几何并不构成对康德空间学说的根本否定。非欧几何的出现只是更加清楚地表明了康德思维的跳跃，并且清楚地表明了这种跳跃带来的后果和误解。如果说没有出现非欧几何，人们即使意识到了这种跳跃，那么也会不把这种跳跃当回事儿的。作为“纯直观”的空间是几何学的可能性条件，但它并不等同于欧几里得空间，也并不意味着所有的几何学都是欧几里得几何学。人们可以在“纯直观”空间的基础上构造出不同的几何学，比方说添加其他理想化的规定或者取消“无限”等(其实，我们也可以不特别地提及取消“无限”，因为“不存在任何平行线”这个理想化的规定就会导致对“无限”的取消，这样就更可以保证我们说话方式的一致)。构造的先后次序也不是那么重要，人们可以在欧几里得几何学的基础上构造非欧几何，如果人们一开始就有非欧几何，那么人们也可以在非欧几何的基础上构造欧几里得几何。所用的方法都是在原有的几何的基础上，通过添加，或者删除，或者修改一些理想化的规定而得到新的几何学。

德国数学家克莱因(Felix Klein，1849—1925)在其著名演讲《爱尔朗根纲领》中给几何学下过这样的定义，即：几何学是研究几何图形对于某类变换群保持不变的性质的学问。我们稍微解释一

下，何谓在某类变换群下保持不变。比方说：欧几里得几何学（就平面的情况下）研究的是长度、角度、面积等在平移和旋转下保持不变的性质，而平面中的平移和旋转构成一个变换群。仿射几何研究的是在仿射变换下不变的性质，即已知种类的圆锥曲线经过变换后仍是同一种类的圆锥曲线，但是长度和面积不再保持不变。用我们从康德那儿获得的道理来理解就是：我们不断地往“纯直观空间”里添加越来越多的“理想规定”，这样我们就获得了具有一定等级次序的几何学，而各种几何学在自己的“理想规定”里都有着自己的不变量。

我们看下面这样一个图①：



从以上的图中我们可以看出，欧几里得几何学其实是有着最多的“理想规定”的几何学，而拓扑学却是有着最少规定的几何学。我们上文所说的康德思维的跳跃在这个图中也得到了清楚的展示。这里，我们要提醒的是，上图远没有穷尽几何学的全部，比方说微分几何就不被包含在上图之中，但是微分几何完全可以看成往“纯直观空间”里添加理想规定而得到的，比方说一个很必要的理想化的规定是：描述空间函数的“可导性”。在现代几何学的宽广的视域里，我们甚至还可以取消连续性来造出新的几何学，不过康德肯

① Richard Tieszen. Phenomenology, Logic and the Philosophy of Mathematics. New York: Cambridge University Press, 2005: 79.

定不再会把它看做几何学，所以我们也不把它看成几何学，此外，“离散的元素”也是需要“纯直观”的，只不过我们不把注意力放在“作为纯直观的空间”上面罢了。

至于高维几何，我们可以作同样的理解，就是说往纯直观空间里添加理想规定而得到。我们认为，空间是可以赋予“维数”的，但是“维数”本身是一个属于“计算数学”的概念，所以空间到底有多少“维”，这个问题并不能从“纯直观空间”中得到回答，也就是说，“维数的多少”并不先天地归属于纯直观空间，“维数的多少”其实是一个理想化的规定。考虑到“分维几何(分形几何)”这个问题就变得越发清楚了。给你一个分维图形，你能直观出它的维数吗？显然不能！因为对于有些分维图形，比方说 Koch 雪花曲线，它的维数按照某种理想化的规定：1.2618…维。所以我们说“维数”是理想化的规定，当然，同所有理想化的规定一样，不能是任意的，它们总是要受到一致性的制约。

综上，如果避免康德所做的跳跃，非欧几何和高维几何都不能形成对康德几何观的致命打击。诚如奥特弗里德·赫费所指出的那样：“《批判》对后来出现的‘欧几里得的或者非欧几里得的几何学’都保持了中立态度。”①

二、几何学在何种意义上讲是先天的

现在我们面临着如何解释“几何学是先天的”问题。如果我们把“先天的”理解成不依赖于任何经验的话，那么几何学就已经是先天的，因为“纯直观空间”不是经验性的，构成具体几何学的附加条件也都是理想化的规定，总之，在这里，没有任何经验性的东西混进来。如果说“先天的”意味着“普遍的”，那么无论是欧几里

① ［德］奥特弗里德·赫费．康德：生平、著作与影响．郑伊倩，译．北京：人民出版社，2007：69.

得几何学还是非欧几何学，只要人们把那些附加的理想化的规定一并思考，那么它们都是普遍的，也就是说，它们都具有“主体间”意义上的客观性，这些客观性很容易在变换群下的“不变量”中得到保证。至于“必然的”，问题稍显复杂一些，如果把“必然的”理解成：“纯直观空间”必然会导致什么样的几何学，那么任何几何学都不是必然的，因为几何学和“纯直观空间”之间是没有自然主义意义上的因果联系的；如果说“必然的”意味着每种几何学都是必然正确的，那么这个“必然性”就是需要证明的，因为几何学并不被还原成“纯直观”，它还有其他理想化的规定，而它们的一致性并不总是自明的。

在数学史上，非欧几何的一致性曾引起了很多的讨论，最后人们是这样来证明非欧几何的一致性的，即把非欧几何的一致性建立在欧几里得几何的基础之上，而欧几里得几何的一致性又可以通过解析几何归结为实数算术的一致性。不过，以上提到的证明方法都使用的是模型还原方法，但是模型还原方法有着自身的缺陷，使用模型还原方法证明的一致性只是相对的一致性，就像外尔所说：“在所有其他情况下，模型方法只能把一个系统的相容性化为另一个系统的相容性。最终还得对一个基本的公理系统证明绝对意义下的相容性。”①然而对于算术的一致性，就像我们在第一章中看到的，哥德尔证明了，它是不可以在形式系统内得到证明的，所以说，根据主流数学家的观点，几何学的必然性还是悬而未决的。但是，这并不妨碍我们去说，几何学的命题是先天综合命题，只要我们不把“先天的”和“必然的”必然地联系在一起就行了。但是，对于我们的观点来说，“几何学的必然性（这里的必然性指一致性）是需要证明的”，这句话其实包含着更多积极的意义，因为这意味着

① ［德］赫尔曼·外尔．数学与自然科学之哲学．齐民有，译．上海：上海科技教育出版社，2007：29.

我们并不能在“纯直观”上任意地附加理想化的规定以构成新的几何学，所以“几何学是纯粹地以约定而为真”的观点是站不住脚的，任何几何学都受到“一致性”的制约。

三、几何学是规定空间属性的一门科学吗?

如果说这里的空间指的是“纯直观”空间，规定指的是对这个纯直观空间进行理想化的规定，那么我们认为几何学是规定空间属性的一门科学。但这只是我们的观点，这个观点仍是需要辩护的，因为在现代数学中，比方说对“连续”有既定的处理，并且现代数学对“连续”的处理方法是丝毫不借助“直观”的(当然，这是在把任何符号直观都不算直观的前提下而言的)，现代数学的“连续”是通过满足某种关系的元素集合构造出来的。如果现代数学是对的，那么几何学在原则上就可以脱离和空间的联系了。关于这一点，我们将在接下来的章节中详细讨论。

现在我们先转向另外一个问题，即“纯直观空间”和“物理空间”的区别。这个问题也不是根本不重要的，因为人们容易把康德的观点误解为：几何学是规定“物理空间”属性的一门科学；而我们从康德出发，必然达到的观点是，如果说存在“物理空间”，那么几何学并不是规定“物理空间”的一门科学。在这里，我们可以简单地作如下理解：“物理空间”指的是物理学家或者天文学家所断言或者所预言的空间。天文物理学家说他们的预言有30%的可错性，无论这是天文物理学家的谦虚还是幽默，都不足以在其上建立我们的几何学。

所以，建立在“现代天文学和物理学”上的反对意见，对我们以上的观点来说，是无效的。比方有人会说，如果整个宇宙是有限的，那么去谈什么“无限”不是毫无意义吗？但是，我们不要忘记，按照康德的理论，“无限”和“连续”是先天地存在于人的内心中的，它并不在乎我们的外部的宇宙到底是什么样子，另外，康德哲学是原则上反对这样一个既能被我们认识，却又独立于我们而存在的“物自体宇宙”的；对康德来说，如果是物自体，我们就不能认识

它，如果我们对它有认识，它就不是物自体。退一步说，即使我们偏离康德哲学，认为我们能了解物自体的世界，并且我们发现这个物自体的世界是“不连续的”和“有限的”，这也并不能阻止人们有“无限”和“连续”这样的纯直观，因为如果人们内心中没有“无限”和“连续”，那么我们如何可能谈论“有限”和“不连续”呢？最后，我们不应该忘记，“无限”，在某种程度上，可以看成是一个“维度依赖量”，比方说，在一个封闭的、有限的二维平面上我们总有可能画出一条一维的无限长的线，所以，即使现代的物理学确定地告诉我们宇宙是有限的，我们依然可以在这个有限的空间画出一条无限长的线，除非现代物理学说，我们的宇宙是一维的并且是有限的，但这是显然错误的。所以，有限的宇宙又怎么能阻止我们拥有无限的纯直观呢？

另外，由于量子力学的成功发展，人们开始谈论离散空间。虽然我不去断言离散空间的思想是毫无希望的，因为这种思想也许在某些物理学领域能够发挥一些作用；但是离散空间的思想还有很多不清楚的地方。离散空间的根据仿佛是：按照爱因斯坦的相对论，时空是物质和能量的函数，而物质和能量按照量子力学是不连续的，所以时空是不连续的，当然据此空间也是不连续的。这样的推理存在着对爱因斯坦场方程的误解，在这里，鉴于本书的限制，我们就不详细论证了。即使不了解场方程，有一点也是很清楚的：广义相对论的数学框架依赖的是黎曼几何，而黎曼几何作为微分几何则是要求连续性和可导性的几何；另外量子力学虽然说，能量的发射和吸收在束缚态下都是量子化的，但这并不意味着能量在无束缚的状态下不能形成连续的量（连续谱）。[①] 最后，量子力学的动力学

① 参见：[英]霍伊尔 F，[印]纳里卡 J. 天文物理学前沿．何香涛，等，译．长沙：湖南科学技术出版社，2005：21-58；或者参见：[美]费恩曼等．费恩曼物理学讲义：第一卷．郑永令，等，译．上海：上海科技出版社，2005：395-396.

方程也都是些微分方程，比方说薛定谔方程，它要求波函数对时间和空间都是连续可微的，因此，即使能量和物质都是不连续的，但也没有什么理由阻止我们说：时间和空间是连续的。数学物理学家外尔对这种离散空间的思维方式也是不满意的，他在《数学与自然科学之哲学》一书中写道："受到量子力学的刺激，这种思想今天在对物理学基础的讨论中再次兴起。但是迄今为止，它一直只是一种思辨……以这种思想为基础，人们应该怎样理解空间中的度量关系？如果一个正方形真正是由缩小的砖片构成的，则沿对角线与沿底边都有相同数目的砖片，而对角线与底边也就有相同的长度。"①可以这样说，任何一种度量空间，只要它涉及无理数（互相之间不可以通约的量），这种离散空间的思想就是与它相矛盾的。

从康德出发，我们可以得到这样的结论：纯直观空间不等于任何具体的几何学空间，具体的几何学空间都有着这样或那样的具体的理想化的规定，而这些理想化的规定并不能还原到纯直观空间。另外，任何几何学也不是关于"物理空间"的学问，相反，"物理空间"是在"纯粹几何"的帮助下得以建构的。所有几何学都是纯粹的，而不是经验的，并且几何学的命题都是先天综合命题。在历史上，"几何学命题是先天综合命题"的观点曾经受到过赖欣巴哈的猛烈攻击，赖欣巴哈在《科学哲学的兴起》一书中这样写道："综合先天的几何学是没有的：几何学如果是先天的，那么它是数学的、分析的几何学；几何学如果是综合的，那它就是物理的、经验的几何学。几何学的演进在综合先天论崩溃中达到了顶点。"②

① ［德］赫尔曼·外尔．数学与自然科学之哲学．齐民有，译．上海：上海科技教育出版社，2007：54.

② ［德］赖欣巴哈．科学哲学的兴起．伯尼，译．北京：商务印书馆，2004：111.

第四节 对赖欣巴哈的康德批评的一些反驳

一、反驳“数学家的几何学是分析性质的”

赖欣巴哈在《科学哲学的兴起》中写道：“……我们必须把数学的和物理的几何学区分开。……他(数学家)感兴趣的不是公理的真理性，而是公理和定理之间的蕴涵关系：‘如果那些公理是真的，那么这个定理是真的。’……因此数学家的几何学是分析性质的。”①

从以上的引言可以看出，赖欣巴哈认为，数学家感兴趣的不是公理的真理性，而是公理和定理之间的蕴涵关系，因此数学家的几何学是分析性质的。在这里赖欣巴哈给什么是“分析性质的”作了一些解说，认为这种分析性质指的是公理和定理之间的蕴涵关系。

从上文的众多论述中我们知道，一种几何体系不会只有一个公理，而公理之间我们并不要求逻辑蕴涵关系，否则它们就是公理和定理之间的关系了。那么，我们凭什么说这些公理之间是相容的呢？凭直观？凭直觉？照赖欣巴哈看来，这是不行的，因为他认为数学家不能这样关心几何的真理性，数学家只需要假设这些公理为真，然后靠逻辑蕴涵关系推出在系统内必真的定理；但是他们有权利假设公理是相容的吗？当然，他们有权利！不过问题是：虽然我们勇敢地假设了，但是我们又从这些公理中推出了矛盾怎么办呢？我们凭什么保证公理是相容的？我们能逻辑地证明公理是相容的吗？

---

① [德]赖欣巴哈．科学哲学的兴起．伯尼，译．北京：商务印书馆，2004：111.

从第一章的讨论我们知道，哥德尔定理否定了这一点，此定理证明了在形式系统内部只靠逻辑推理我们并不能证明一致性。

也许有人辩护说，在迄今为止的这些公理的合法的推论中，我们并没有发现矛盾，但是，从数学的角度看，这并不意味着我们证明了它们的相容性，因为真正的数学的证明不能经验地依赖于迄今为止所发生的事情，比方说哥德巴赫猜想，直到目前的所有经验都支持这一猜想，但数学家们并不能说，这个猜想得到了证明。

如果一致性得不到证明，那么，数学家的几何学(按照赖欣巴哈的分类)也很难完全是分析性质的；赖欣巴哈认为的数学家的几何学的性质："如果那些公理是真的，那么这个定理是真的"就是成问题的。为了保证几何学的分析性，人们必须说："如果那些公理是真的，并且它们是相容的，那么这个定理是真的。"因为，如果它们不相容，就会从它们出发得出相互矛盾的定理，相互矛盾的定理不可能都为真，否则公理必为假，因为根据逻辑的实质蕴涵，只有从假命题中才能推出相互矛盾的命题都是正确的。如果完全不考虑公理系统的一致性，数学家的几何学的分析性质也无从谈起。

也许有人说，我们只需多假设一个条件："如果它们是相容的"，这样，我们还是保证了几何学的分析性质，保证了我们"如果，那么"的形式。但是，我们很快会看到，"如果它们是相容的"这个假设从根本上讲是不恰当的，因为对于相容性，不是假设它们相容就能了事的，因为矛盾的出现与否并不依赖于假设。就像《数学哲学》的《导言》的作者所说："'因约定而为真'的一切是假定的真。无论约定如何精心构想，最终仍可能不一致。首先，它们之一致与否是属于组合数学的数学事实……但这事实本身却难以表示为约定事实。倘若确实如此，那就并非全部数学都能是因约定而为真的。这表明，我们甚至制定约定为真的公理的能力也受到这些公理

的逻辑后承的(非约定)事实的限制。"①所以,纯粹的数学家的几何学也不可能像赖欣巴哈认为的那样,是"如果,那么"的分析的几何学。我们可以这样说,从某种意义上讲,数学家的几何学也是综合的,因为它总需要一些纯分析以外的东西,比方说柏拉图的理念世界。

当然,我们还可以假设这样的情况,公理只有一个,本身就是纯粹分析的,其他定理都靠此公理由逻辑蕴涵建立起来。不过,如果说一种几何学完全严格地建立在一个本身是同义反复的公理上,我们将完全有理由担心,那将是一种很无聊的几何学,如果我们还有勇气承认它是几何学的话。很幸运,我们目前还没有这样的几何学。

二、反驳"物理的几何学必然是经验的几何学"

我们还是先看赖欣巴哈的表述:

"……只有当蕴涵式被切开,公理和定理分别被确认时,几何学才能导致综合的陈述。那时,公理要求一种通过同位定义作出的解释,从而成为关于物理客体的陈述;这样,几何学才被变成为描述物理世界的体系。然而在那种意义上,它就不是先天的,而是具有经验性质的了。"②

如果按照赖欣巴哈的信仰,数学家的几何学是分析性质的,公理和定理是严格的蕴涵关系,那么,蕴涵式被切开,公理和定理分别被确认就是多余的,因为只要公理和定理中有一个与物理世界不符,那么这种几何体系就是不适合物理世界的;如果不放弃这种几何体系,那只有修改物理世界了,让它与几何学相符;不过,这种

① [美]保罗·贝纳塞拉夫,希拉里·普特南.数学哲学.朱水林,等,译.北京:商务印书馆,2003:26.

② [德]赖欣巴哈.科学哲学的兴起.伯尼,译.北京:商务印书馆,2004:111.

情况是赖欣巴哈不愿意看到的，因为这样就太康德了。

在赖欣巴哈那里，与其分别去确认一种几何体系内部的公理和定理，还不如通过试探确认的方式找出哪种几何体系比较符合我们的经验性的物理世界。当然，在试探确认的时候，有些体系的公理好确认些，有些体系的定理好确认些。

我们上面的分析并没有曲解赖欣巴哈的意思，赖欣巴哈认为自己面临的确实是在众多的数学家的几何中进行选择的事。为此他还给我们设定了选择的标准，赖欣巴哈给我们定义了什么是自然的几何学："在等价描述中，有且只有一个描述，在其中刚体和光线并不被称为被普遍的力所'畸变'的。对于这一描述我要使用正常体系这个名称。现在可以来问哪一种几何学是导致正常体系的问题了；而这种几何学也就可以称为自然的几何学了。"①

所以，即使按照赖欣巴哈的思路，问题也不像赖欣巴哈所设想的那样，因为并不是说，公理和定理分别被确认时，几何学就能导致综合的陈述，而是说，我们要从数学家的众多的几何体系中选择出这样一种几何学，而这种几何学就它与经验世界的关系而言，可以被称为正常体系。

但我们的问题是：仅仅一个选择怎么就能使这种几何学导致综合陈述呢？因为按照赖欣巴哈的意思，数学家的几何学可都是分析的。

我们只是作了选择，我们并没有对这种几何学添加什么，我们只是对它作了物理的解释。如果硬要说这种几何学获得了什么新的东西，那它获得的就只是物理的含义。这种几何学的推论也许可以引导我们发现新的物理问题，但我们并不能反过来说我们给这种几何学添加了什么新的东西。这样，我们就发现了怪事，因为由赖欣

---

① ［德］赖欣巴哈．科学哲学的兴起．伯尼，译．北京：商务印书馆，2004：106.

巴哈分类的数学家的几何学是分析的，现在我们把它用到物理上，我们对它并没有什么添加，在赖欣巴哈那里它却神奇地变成综合的了。

现在，我们可以看看物理的几何学是不是经验的，赖欣巴哈说："显然，谈到自然几何学，即对于它刚体和光线不被畸变的几何学，这个问题只能通过经验的探究来回答。在这一意义上，物理世界的几何学问题是一个经验问题。"①

我们可以通过一个例子来阐明赖欣巴哈的想法。

比方说，你有很多的数学公式，一开始你还认定它们是纯粹分析的，为了解决一个实际的经验问题，我选择了一个数学公式，于是这个被选的数学公式就神奇地变成经验的了。这就是赖欣巴哈的意思吗？

当然，如果有人辩护说，赖欣巴哈只是说选择是一个经验问题，那我们也就没有什么好反对的了。不过，在这里，赖欣巴哈的意思并没有被曲解，他确实认为物理的几何学是经验的科学。他说："够奇怪的，这一漫长的历史线索一直可以回溯到最初时期所站的立场：几何学是在埃及人那里作为一种经验科学开始的，后来被希腊人变成为一种演绎的科学，最后，经过最高完善程度的逻辑分析发现了几何学有好多种，而在这些几何学中有而且仅有一种是物理的几何学，它才又被还原为一种经验的科学了。"②

三、反驳"几何关系是可以视觉化的"

我们还是先看赖欣巴哈的一个问题，他问道："我们怎么才能

① ［德］赖欣巴哈．科学哲学的兴起．伯尼，译．北京：商务印书馆，2004：106.

② ［德］赖欣巴哈．科学哲学的兴起．伯尼，译．北京：商务印书馆，2004：110.

使非欧几何关系视觉化，一如我们能看见欧几里得式几何关系那样呢?"①

我们在看赖欣巴哈的回答之前，我们先思考一个问题：赖欣巴哈认为欧几里得几何关系是视觉化的，真的是这样的吗？在欧几里得几何那里，三角形的内角和是180度，这是看出来的吗？勾股定理是看出来的吗？我们能精确地看出直角三角形边的关系吗？圆的周长和直径的比值是看出来的吗?

我认为，在欧几里得几何学那里，我们能够看"两点之间直线最短"，"三角形两边之和大于第三边"，但是我们不能看出精确的数值关系。在欧几里得几何学内部就有很多定理都不是可以视觉化的。难道，赖欣巴哈的"看见欧几里得式几何关系"就是像看见猫、狗一样地看见吗？如果是这样，我们只能说，我们看到了图形，我们不能说看见了几何关系。

此外，我们还要清楚的是，欧几里得几何学也并不只是平面几何学和平直的立体几何学，它也包括高维的欧几里得几何学。四维的或大于四维的欧几里得空间，它仿佛永远都是不可以视觉化的。

可见，"看"在欧几里得几何学那里，已经不是那么容易了，而非欧几何又如何呢？我们能看三维超曲面上的线长吗？我们能看四维球吗？不过，赖欣巴哈是乐观的，他说："欧几里得几何学是我们周围物理世界的几何学；没有什么奇怪，我们的视觉观念已变成为与这一周围环境相适应，因此也遵照欧几里得的定律。我们如果生活在另一环境里，它的几何学结构是显著的与欧几里得的不同，我们就会与新环境相适应，学会看非欧式的三角形和定律，一

① ［德］赖欣巴哈．科学哲学的兴起．伯尼，译．北京：商务印书馆，2004：111.

如我们现在看欧几里得结构一样。"①

我认为，赖欣巴哈所说的理由是站不住脚的，他混淆了视觉化和习惯。我们要清楚的是，习惯了的东西并不意味着我们能看出它，这样的例子很多。我们多数人习惯十进制的四则运算，不习惯二进制的四则运算。这是个习惯问题。我们虽然习惯了十进制，但我们能一下看出 $78926\times5643+12578-\frac{3364}{2365}$ 等于什么吗?②

长期与高维(高于三维)非欧几何打交道的数学家，大概已经习惯了这种几何，但我相信，他对这种几何不能有任何视觉化的直观和清楚的画面设想，当他想象这些高维的东西时，脑袋里只能有些非欧二维的或者是欧式三维的图形和一些数学公式以及符号。

另外，我们还要提醒的是，在康德那里，"纯直观"并不等于视觉化，也不等于具体的经验直观。

综上，我们认为赖欣巴哈对康德的驳斥不仅是无力量的，而且是错误的。

第五节　相对论与康德的"时空观和几何观"

康德"时空观和几何观"的批评者们经常援引相对论，所以，我认为在本书里有必要比较一下"相对论的思想"和康德的时空观。在这一节里，我不再想象上节对待赖欣巴哈那样提供针对某个人的具体的反驳。我们这里关心的只是爱因斯坦(Albert Einstein)的相对论和康德的时空观以及几何观，所以说，对众多的其他人的评介就显得并不是必不可少的。

爱因斯坦在《相对论的意义》一书中对时间和空间，从物理学

① ［德］赖欣巴哈．科学哲学的兴起．伯尼，译．北京：商务印书馆，2004：111.

② 它约等于445391194.5776。

的角度，作过一般性的评述。他说："在相对论以前的物理学中，空间和时间是分离的客体(separate entities)。时间的确定与参考空间的选择无关。牛顿力学对于参考空间来说是具有相对性的，因此，像'两个在同一地点非同时发生的事件'这样的陈述没有客观意义，也就是说，与参考空间无关。但这个相对性对于理论的建立没有起任何作用。人们谈论空间上的点和时间上的时刻，就好像它们是绝对的实在(absolute realities)。人们没有认识到确定时空(space-time)的真正元素是那些由 4 个数 X_1, X_2, X_3, T 所确定的事件。'某事件正在发生'这一概念是四维连续统的概念；但是对于这一点的认识却被相对论以前的物理学中时间的绝对性所模糊了。当放弃了时间的绝对性，尤其是同时性的绝对性这一假设后，就会立刻认识到时空概念(time-space concept)的四维性(four-dimensionality)。某个事件发生的空间上的点和时间上的时刻都不具有物理实在，只有事件本身才具有物理实在。两个事件在空间上没有绝对关系，在时间上也没有绝对关系，但是却有绝对的空间与时间的关系。没有任何客观合理的方法能够把四维连续统分离成三维空间连续统和一维时间连续统，因此从逻辑上讲，在四维时空连续统(space-time continuum)中表述自然定律会更令人满意。"①

从这一段引言我们可以清楚地看出，爱因斯坦出于物理学的考虑，反对把时间和空间看成是分离的、客观的实体，这也很容易让人想起康德的观点。在康德看来，时间和空间也不具有外在实体的客观性，康德说："空间和时间作为一切(外部和内部)经验的必然条件，只不过是我们一切直观的主观条件……"②但是，只是注意到这些微小的相同点并不能说明任何问题，因为不把时间和空间看

① ［美］爱因斯坦．相对论的意义．郝建刚，等，译．上海：上海科技教育出版社，2001：26-27.

② ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A49.

成客观绝对的实体，对于康德和爱因斯坦来说，是出于完全不同的理由。作为哲学家的康德是从自己的先验哲学出发把时间和空间推进了内心；而对于作为物理学家的爱因斯坦来说，重要的是：什么样的物理测量才真正具有客观的意义。比方说，在狭义相对论那里(以下以狭义相对论为例)，爱因斯坦从相对性原理和光速不变原理出发，必然得出在测量上时间和空间是相对的观点，时间的量度和空间的量度都是参照系依赖量，所以单独的时间和空间在爱因斯坦看来都不具有客观意义。进而，从哲学上讲，他们两个对时间和空间的客观性的否定并不在同一个层次上，康德说时间和空间不是客观的，是说时间和空间不是物自体，所以，对于人类来说，它们不是外在客观的，但它们却是人类一切经验的必然条件。从这个角度上讲，用现代哲学的话来说，康德的时间和空间具有主体间性的客观性；而对爱因斯坦来说，时间和空间都是参照系依赖量，如果假定不同的人处于不同的参照系里，那么每个人测量(对同一个物理事件)的时间和空间就都是不同的，所以，从测量的角度来讲，时间和空间就不具有主体间性。虽然爱因斯坦不认为分离的时间和空间有主体间性的客观性，但是他认为"时空连续统"具有客观性，用爱因斯坦自己的话说，就是："两个事件在空间上没有绝对关系，在时间上也没有绝对关系，但是却有绝对的空间与时间的关系。"

比方说，一段"时空连续统"，它在不同的参照系里有着不同的时间分量和空间分量，但是这段"时空连续统"本身却是个不变量，它不会因为参照系的不同而发生改变，所以爱因斯坦说它是客观的。它是什么样的客观性呢？我认为，如果人们不冒彻底的物理主义的风险的话，"时空连续统"的客观性是一种主体间性的客观性(也许，爱因斯坦本人不这样认为)。

现在我们的问题是："时空连续统"的主体间性的客观性和康德的"作为纯直观的时间和空间"的主体间性的客观性有什么区别呢？区别是明显的，在康德那里，时间和空间是纯直观，在我们的

经验生活中，它有一种来自主体的强迫性，也就是说，我们(作为人类)必须如此。而“时空连续统”就没有这种特点，它显然是结合测量而产生的高度的理想化的规定。如果我们不做康德自己所做的思维跳跃，那么我们并看不到相对论对康德时空观的致命的打击，因为爱因斯坦只是在康德的时空里引入了一种度量，当然，有了这样一种特殊的“度量”，人们就可以方便地处理一些物理问题。

如果我们把这种“度量时空”纯粹化，抛弃实际物理测量中所受的限制，我们就会得到一种新的几何学。方法同上，不同的是，我们要把“作为纯直观的时间”也拉进来：往纯直观“时-空”里添加“时空线元不变”(时空线元在这里可以理解成一段时空连续统)这个理想化的规定。这种几何学不同于我们上面提到的非欧几何学，但它也是纯粹的几何学，因为时空是纯直观，“时空线元不变”是一个理想化的规定。在这里，也并没有赖兴巴哈意义上的“物理学家的几何学”，虽然它有着很明显的物理学的起源。这种几何有时也被称为闵可夫斯基几何，它并没有什么神秘的地方，其实你可以把它理解成一种伪欧几里得几何学。我们知道，在欧几里得几何学那里(为了叙述的简单性，我们只考虑平面的情况)，一条线段，它的长度是一个坐标不变量，就是说，无论你选取什么样的坐标系，线段的长度总保持不变，变化的只是它在两个坐标轴上的分量；同样，在闵可夫斯基几何的情况下，你只需要把“空间线段”改换成“时空线段”，它同样是一个坐标系(对应物理上讲的参照系)不变量。虽然，对于闵可夫斯基几何来说，我们不可以把时间轴和空间轴处理成完全一样的，但是这对于它作为纯粹几何学来说是没有任何影响的。

对于广义相对论来说，情况显得复杂一些，不过，就像在狭义相对论中的“时空线元不变”一样，在广义相对论中也有“广义时空线元不变”，它表明任意的参考系都是平权的，它可以被视为广义相对性原理的基础，在广义相对论中扮演着极其重要的角色，因为

在“广义时空线元不变”里已经包含着度规和度规的变换规律，而度规是广义相对论中的基本物理量，可以这样说，广义相对论的主要内容是围绕度规展开的。在这里我们不可能很完整地叙述这一切，因为它牵涉很多其他的数学知识。但是，清楚的是，广义相对论所使用的几何绝对是一种纯粹的几何，我们可以把它称做“伪黎曼几何”。“伪黎曼几何”和闵可夫斯基几何的关系可以用黎曼几何和欧几里得几何的关系来类比。黎曼几何作为一种微分几何，与欧几里得几何不同的是，它对空间没有太多的假设(理想化的规定)，它只假设了空间的可导性，而它并不要求空间是平直刚性的。比方说(在二维的情况下)，黎曼几何给出了线元的一般形式：$ds^2 = g_{11}dx_1^2+g_{12}dx_1dx_2+g_{21}dx_2dx_1+g_{22}dx_2^2$。只有在很特殊的情况下，黎曼几何的线元公式才变成了刚直的欧几里得几何的线元公式：$ds^2 = dx_1^2+dx_2^2$。从数学的角度看，黎曼几何是一个更一般的几何框架，根据“度规张量”(上面具有数标的 g_{ij} 就代表度规)的不同它可以转变成各种各样的几何学。原则上讲，它是很接近“纯直观空间”的，它只是往“纯直观空间”里添加了“各种可能的维度”和“可导性”。对于“伪黎曼几何”我们也可以作类似的理解。所以，“相对论”的几何和空间并不构成对康德的几何观和时空观的根本否定，如果康德本人没有作跳跃性的断言的话。

第六节　纯粹几何学和应用几何学

弗里德曼(Friedman)在《康德和精确科学》一书中，总结了现代学者对康德几何学的不满和抱怨的主要原因：“对康德的标准的现代抱怨如下：康德没有能够作出纯粹几何学和应用几何学的重要的区分。纯粹几何学研究的是：在一个特殊的公理系统里，命题之间形式的或者逻辑的关系……作为这样的几何学，它确实是先天的和确定的，但是它并不包含对空间直观或者其他种类经验的诉求。另一方面，应用几何学关心的是：在一个真实的世界里，一个公理

系统在一个特殊的解释下的真或者假。"①

如果说弗里德曼的总结是切中事实的，那么对康德几何学的现代抱怨就是没有太多的道理的。根据弗里德曼的总结，纯粹几何学研究的是：在一个特殊的公理系统里，命题之间形式的或者逻辑的关系。对此的详细讨论，我们还是要放到以下的章节。但是，就目前的情况而言，好多事情已经是清楚的。为什么与空间有联系的几何学就是不纯粹的？为什么几何学的纯粹性要符合那些几何哲学家的定义？我们以上的分析告诉我们，我们完全可以从康德的方法中得到纯粹的几何学。

从我们的观点出发，任何几何学都是纯粹的，因为它们都是往纯直观空间里添加理想化的规定而得到的，这里并没有经验性的东西混进来；但是另一方面，这并不意味着纯粹的几何学就是不可以应用的。确实，具体到实际应用的某个方面，有的几何学比较适合，有的几何学不太适合，但是我们并不能根据几何学的适用与否来下断言说：适用的几何学为真；不适用的几何学为假。有时候，我们就是为了某个实际经验的情况发明了一种几何学(但是，不要忘记，只要它上升为几何学，它就是纯粹的)，比方说，闵可夫斯基(Hermann Minkowski)为了狭义相对论而发明了一种几何，我们现在称之为闵可夫斯基几何，可以说，它就是为狭义相对论量身制

① Michael Friedman. Kant and the Exact Sciences. Massachusetts and London: Harvard University Press, 1992: 55-56. 英文原文："The standard modern complaint against Kant runs as follows. Kant fails to make the crucial distinctions between pure and applied geometry. Pure geometry is the study of the formal or logical relations between propositions in a particular axiomatic system, ... As such it is indeed a priori and certain, but it involves no appeal to spatial intuition or any other kind of experience. Applied geometry, on the other hand, concerns the truth or falsity of such a system of axioms under a particular interpretation in the real world."

作的，当然，对于狭义相对论来说，它就是最适用的；难道说，闵可夫斯基几何学就比其他的几何学更真吗？显然不是。我认为恰当的表述是：在这种情况下，闵可夫斯基几何比其他几何学更加适用，这与几何学本身的真假毫无关系。如果有人说，我把适用定义为真，不适用定义为假；这当然也可以，但是我认为，这会引起不必要的麻烦，因为这样就会导致这样的结果：同一种几何学在这儿为真，在那儿为假；在这儿"真度"高，在那儿"真度"低，在另外一个地方又彻底不真了；而作为纯粹几何学，蓦然地，一切几何学又都真了起来。另外，由于闵可夫斯基几何在狭义相对论方面的方便运用，闵可夫斯基几何就因此而变得不纯粹了吗？也不是，它的纯粹性和欧几里得几何学一样。

我们现在来看一个简单的例子：有一个这样的吃坚果的部落，他们是这样来获取坚果的：他们生活的土地上布满着封了口的小洞，有的小洞里有坚果，有的小洞里没有坚果，如果小洞里有坚果，那么就只有一个坚果。他们挖开小洞，以获得坚果，这是他们主要的，几乎是全部的生活方式，土地的测量对他们来说是无关紧要的。于是他们发展出了一种数学计算方法，比方说：$\frac{3}{7}+\frac{5}{9}=\frac{8}{16}$，它的经验性解释是：第一次挖了 7 个洞，3 个洞里有坚果，第二次挖了 9 个洞，5 个里面有坚果，两次总共挖了 16 个洞，共获得了 8 个坚果。我们看到，他们这种分数的加法是分子和分子相加，分母和分母相加。我们问，他们的这种数学纯粹吗？他们的这种数学虽然有着经验的起源，但它是纯粹的，他们也可以纯粹地作运算。如果说我们的算术是纯粹的，那么他们的也就是纯粹的。我们的分数运算对于他们来说是错误的吗？当然不是！只不过他们一时还找不到明显的运用领域，因为他们不搞土地测量；但是，如果你给他们解释我们的分数运算的含义，他们也会理解。其实数学中这样的例子很多，比方说，广义相对论以前的黎曼几何，在获得应用领域以前的希尔伯特无穷维空间等。

一种几何学的产生确实可能有它经验性的起源，但是这种经验性的起源，第一，不妨碍这种几何学的纯粹性，第二，它也不增加这种几何学的真理性，第三，不是来源于这种经验的几何学也不因为不适合这种经验而成为错误的。

我们都知道，欧几里得几何学有着经验的起源，但这根本不能阻碍我们说，欧几里得几何学是纯粹的。分形几何也有着经验的起源，但是分形几何也是纯粹的。这些几何学都有着自己的应用范围：欧几里得几何学不会因为“刚直的线”不存在而退出几何学大家庭，工程师们也不会因此而放弃使用它；分形几何也不会因为不存在“无限长的线段”而被驱逐，相反，对它的运用方兴未艾。我们正是用这些理想的纯粹的几何整理我们的经验，而不是用我们的经验来判断几何学的真伪，几何学的真伪永远不是靠经验来判断的，经验只可以对某个几何学说“你不适合我！”，但是经验没有能力说：“你错了！”几何学只受到自身一致性的制约。

所以，我认为区分纯粹几何学和应用几何学是完全不必要的。作这样的区分就好像是在说：有些几何学是不纯粹的，有些几何学根本是不可运用的一样。其实，每种几何学都是纯粹的，每种几何学原则上都可以找到自己的适用范围。应用一种几何学去解决一种具体的经验问题，这是需要一定的创造力的事情，所以说，在应用上也存在一定的自由度，即选择这样一种几何学还是那样一种几何学来解决问题，进而我们也没有任何理由得出这样的结论，即某一种几何学原则上是没有任何应用领域的。

第七节　对一些概念的澄清

通过上面的讨论我们知道，在康德那里纯直观空间是外部经验的可能性条件，它并不等于任何几何学的空间。纯直观空间在数学中的特征只是连续的和无限的。通过添加一些理想化的规定，其他的几何学空间可以在其上建立，特别需要指出的是欧几里得空间也

可以在纯直观空间上建立。因为纯直观空间经常被人误认为是欧几里得空间，现在我们再从另外一个角度进行解说。

一、纯直观空间和欧几里得空间

对于欧几里得几何学的空间，数学家们有很多种定义，它们在数学上是相互等价的，在这里，我们只引用彭加勒在《科学与假设》中对欧氏几何空间总结的五点最基本的特征，以供我们后面讨论时参考。

欧几里得几何学的空间：

(1) 它是连续的。

(2) 它是无限的。

(3) 它有三维。

(4) 它是均匀的(homogeneous)，也就是说，它的所有点都相互等价。

(5) 它是各向同性的(isotrapic)，也就是说，通过同一点的所有直线相互等价。[①]

现在我们可以清楚地看到：纯直观空间只具备(1)和(2)，通过添加(3)、(4)和(5)我们得到欧几里得空间。

二、视觉空间和纯直观空间以及欧几里得空间

有时候人们容易把康德的纯直观空间理解成视觉空间。根据彭加勒，视觉空间就是视觉的印象，它来自在视网膜末端形成的映像，这个映像是连续的，但是只有二维(但是更深刻的分析表明，连续和二维也只是一种幻觉)。这种视觉空间不是均匀的，主要是因为视网膜上的点并不起相同的作用。视觉空间的第三维以两种不

---

① 参见：[法]昂利·彭加勒．科学与假设．李醒民，译．北京：商务印书馆，2006：49.

同的方式向我们揭示出来：调节的努力和双眼的会聚——这两种感觉都是肌肉感觉，所以第三维并不起其他两维相同的作用，据此，三维的视觉空间并不是各向同性的。① 如果彭加莱的分析是对的（当然现代科学对视觉的研究还在发展），那么视觉空间既不是康德心目中的纯直观空间，也不是欧几里得空间。

因此，我们在思考康德的时候，尤其要注意：视觉空间、纯直观空间以及欧几里得空间不是同一个东西，虽然有时候康德自己把纯直观空间看成了欧几里得空间。

小 结

从康德的时空观出发，不做康德本人所做的跳跃，我们得出了这样的结论：纯直观空间不等于任何具体的几何学空间，但它是其他几何学空间的基础，用康德的话说，它是几何学的可能性条件。具体的几何学除了“纯直观”外还需要一些理想化的规定。几何学都是纯粹的，但是，几何学的命题并不能自身分析地真着，所以几何学的命题是先天综合命题。“先天的”我们是在“不依赖于经验的意义上”讲的。近代以来对康德时空观和几何观的批评针对的多是康德某些具体的断言，而这些断言是由于康德本人所做的“思维跳跃”导致的。从这个角度来看，他们对康德的批评都是非本质的。相比较之下，数理逻辑学家王浩对康德的批评就显得更切中一些，他说：“非欧几何的发现不必看做是对康德学说的反驳，因为我们可以把非欧几何看做是在欧几里得几何上面的构造物。一个更重要的反对理由是，康德的理论并没有为建立这些上层构造和另外一些上层构造所依据的那些原则提供充分

① 参见：[法]昂利·彭加勒. 科学与假设. 李醒民，译. 北京：商务印书馆，2006：49-52.

的解释。"①王浩是有道理的，不过，在我们对康德时空观和几何观进行重新解释以后，人们完全可以在"纯直观"上构造各种各样的几何学，当然，人们也完全可以从欧几里得几何学出发构造非欧几何学。

① 王浩．数学的理论与实践．//邓东皋，等．数学与文化．北京：北京大学出版社，1999：93.

第三章

现代数学中的连续性及其问题

现在我们必须面对在上一章中一直回避的问题了：几何学是规定空间属性的一门科学吗？在上一章中，从我们的康德主义观点出发，我已经肯定地回答了这个问题，如果说我们把空间理解成“纯直观”，并且把规定理解成“理想化的规定”的话。此外，我们也展示了把几何学建立在“纯直观”上的可能性。但是，现代数学则完全地反对我们的观点。

我们先简要地陈述一下我们和现代数学的主要分歧：(1) 我们跟随康德，认为“连续”和“无限”是先天地源于“纯直观”的，用其他的方式，人们并不能令人满意地，或者只能很艰难地获得“无限”和“连续”，并且其他的方式都是不自然的和潜藏着问题的。(2) 现代数学则认为，“连续”和“无限”必须通过集合论由离散的元素构造出来，其他的方式都是模糊不清的，它们并不能把握无限和连续的本质。

从这个分歧我们可以清楚地看到，如果现代数学是对的，那么几何学就必须抛弃“纯直观”，而必须在集合论的基础上建立起来。因此，“纯直观”也就不是几何学的可能性条件，进而“几何学可以建立在纯直观上”的观点就是完全错误的。他们对康德的抱怨和不满的根源就在于这个根本的分歧。Gorden Brittan 在 *Kant's Philosophy of Mathematics*（《康德的数学哲学》）一文中对这个分歧有

很好的表达，他说："根据罗素，由于康德缺少展现连续性和无理数的程序，康德诉诸直观来展现一个点的运动(康德跟随牛顿和牛顿'流数'的观念)。但是魏尔斯特拉斯①、戴德金、康托尔等人已经在整个实数的基础上，并在不求助于运动或者其他的时空直观的前提下，成功地解释了连续性和无理数等情况。'正是这一结果，它甚至胜过非欧几何，对康德的把先天直观作为数学基础的理论来说，是致命的'。(参见罗素的《数学原理》，1937)"②

现在我们把目光转向现代数学中的连续性(在这里，我们不专门地关注无限，因为在现代数学中"实无限"和"连续"有着密切的联系)。我们想通过对现代数学中连续性的批判来展示：把数学建立在纯直观上，不仅是像我们在上一章中看到的那样，是可能的；而且，考虑到现代数学中集合论的一些疑难，是必要的。

第一节　现代数学中的连续性

现代数学中的标准的"连续"是什么呢？我们先看一段罗素在《数理哲学导论》中所讲的话："……一般人和哲学家认为连续性就是没有分隔，如同浓雾时，特有的一般区别全都消失一样。雾给人

① Karl Theodor Wihelm Weierstrass, 1815—1897。

② Graham Bird. A Companion to Kant. Blackwell Publishing Ltd, 2006: 225. 英文原文："According to Russell, Kant, lacking a procedure for representing continuity and irrational numbers, called on intuition to represent the motion of a point(following Newton and his notion of a, fluxion'). But Weierstrass, Dedekind, Cantor, et al. have succeeded in accounting for continuity and irrational numbers, and so on, on the whole numbers alone, without any appeal to motions or other spatial-temporal intuitions. 'It is this result, still more than non-Euclidean geometry, which is fatal to the Kantian theory of a priori intuition as the basis of mathematics.'(Russell 1937)"

一种茫然无际的印象，不确定的多，也没有确定的区分。玄学家所说的连续性便是这一种东西。他们说这种连续性是他们的心灵生活及孩子的甚至动物的心灵生活的特征，这倒也是对的。”①

罗素的这段话是有些幽默的，但是我们能在多大程度上严肃对待它呢？罗素又是怎么理解连续性的呢？

我在这里主要介绍一下罗素对连续性的定义，现代数学中对“连续性”的标准定义与此类似，并无本质的区别。罗素的定义借鉴了数学家戴德金（Dedekind，1831—1916）和康托尔（Cantor）对实数连续性的定义。在这里，我们只选取一种定义来介绍，它的主要的方法来源于康托对实数连续性的定义。当然，罗素在这里对连续性的规定并不仅限于实数集，而是面向任何可能的集合的，就像彭加勒在《科学与假设》中所说：“数学家研究的不是客体，而是客体之间的关系，这些客体被其他客体代换是无关紧要的。”②所以，对于数学家来说，只要一个集合，无论它是怎样的集合，如果它满足了下述规定，那么它就是连续的。从这一点我们已经清楚地看出，现代数学中对连续性的定义并不依赖于对时空的直观。

罗素对“连续性”的定义：

（1）如果序列中的每一个分子（元素，项）都是一个序级或者反序级的极限，那么这个序列就是“内在凝聚的”（condensed in itself）。③

（2）如果包含在一个序列中的每一个序级或反序级都有一个

① ［英］罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003：101.

② ［法］昂利·彭加勒．科学与假设．李醒民，译．北京：商务印书馆，2006：23.

③ 参见：［英］罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003：98.

极限，那么这序列称为是“封闭的”(closed)。①

(3) 如果一个序列是内在凝聚的和封闭的，就是说，该序列的各项都是一个序级或反序级的极限，并且包含在该序列中的每一个序级或反序级都在该序列中有一个极限，那么，这一序列被称为是“完备的”(perfect)。②

(4) 如果一个序列的“中间类”乃是关系域的一个子类，并且在序列的任何两项之间有这类的一些分子，那么这样的序列被称为是“紧致的”(有些书上称“稠密的”)。③

(5) 如果一个序列是紧致的和完备的，那么这序列就是“连续的”。④

也许，通过以上对罗素的“连续性”定义的简单介绍，我想，我们对现代数学所理解的连续性已经有所了解。要点是：这种连续性是属于序列的，或者说属于一个集合，不过这个集合是有序的集合。如果你对罗素的定义的理解有术语上的困难，你可以想象一下实数集，这是一个最好的例子，因为实数集就是罗素心中连续性的蓝本。实数是有序的，任何两个实数都可以比较大小；实数是紧致的(稠密的)，因为任何两个实数之间都存在无穷多的有理数；另外，实数是完备的，因为任何极限运算的结果总还是实数。

罗素对这样的连续性的定义是满意的，也是乐观的，他说：“运动的连续性(如果运动是连续的)是函数的连续性的一例；另一方面，空间、时间的连续性(如果空间、时间是连续的)是序列的

① 参见：[英]罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003：99.

② 参见：[英]罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003：99.

③ 参见：[英]罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003：100.

④ 参见：[英]罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003：100.

连续性的一例，或者(说得更谨慎一点)空间、时间的连续性通过充分的数学处理，可以归约到序列的连续性。”①

从这里我们可以清楚地看到，在罗素那里，连续性并不像我们在上一章中所理解的那样来源于作为纯直观的时间或者空间；连续性是属于符合上述定义条件的任何序列的；并且如果时间、空间是连续的，那么它们就只是序列连续性的某些具体的例子。

罗素认为，上面定义的连续性和普通人或者哲学家所具有的对连续性的模糊观念完全不同，他的连续性也丝毫没有“流动”的意思，所以他认为，现代定义的连续性是逻辑清晰的。

第二节　傻瓜的观点——对连续性的疑问

一、对实数连续性的疑问

安徒生的童话故事《皇帝的新装》是颇有寓意的。在这篇童话里，在快要结束的地方，安徒生让一个小孩儿喊道：“国王什么也没有穿!”这时其他的大人才敢于承认国王其实真的什么也没有穿。从这一童话故事里我不想得出这样的结论，说小孩子更能说出真理，就像德语谚语所说：Kinder und Narren sagen die Wahrheit(小孩儿和傻瓜说真理)。我想得出的结论只是：小孩和傻瓜更容易说出自己的疑问；而大人们因害怕戴上愚蠢的帽子更容易人云亦云。

在现代数学中，“实数是连续的”是一个不争的事实。如果谁对此有疑问，谁就是数学的外行。但是，在我这篇论文里，我还是要对此提出疑问，就算是傻瓜的观点吧!

为了清楚地提出我的疑问，我先引用罗素在《数理哲学导论》

① [英]罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003：100.

中的一段话："举实数序列为例。序列中每一个实数完全确定，不能容许改变；它并不是不可察觉地逐渐转变成另一数；它是硬性的，分离的单位，虽然与其他各单位的距离可以小于任何预先指定的有穷量，然而这距离总是确定的。"①

从罗素的这一段话我们可以清楚地看到，罗素认为在一个实数序列中，每一个实数是硬性的，分离的单位，它与其他实数之间有着确定的距离。

如果说"给定的两实数之间有着确定的距离"，那么这一段距离是由什么组成的呢？在罗素那里，这个距离当然完全是由实数组成的，不能由空间或别的什么组成，否则，我们有什么理由说实数的序列是连续的呢？根据戴德金的理论，实数集是没有空隙的。

如果说"每一个实数是硬性的，分离的单位"，那么这样的每一个实数(硬性的，分离的单位)有长度(延展度)吗？如果说每一个实数都是没有长度的，那么我们是如何从没有任何长度的实数中得到距离的呢？如果说每一个实数是有长度的，那么我们还有理由说任何两个给定的实数之间有无穷多个实数吗？

二、对"点集"的连续性的疑问

当然，如果说"无限"和"连续"能够成功地用集合论的方式来处理，那么我们就不再能说"空间是几何学的可能性条件"，因为通过集合论赋予我们的"无限"和"连续"，我们就完全可以绕过"空间"建立各种各样的几何学。因为线、面等是由点组成的，而点又可以和数之间建立一一对应的关系。所谓的几何图形其实只是满足一定条件的点集，它们原则上和空间没有关系。而解析几何只是清

① [英]罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003：101.

楚地向我们展示了这种联系。我们引用一段现今的教科书来说明现代数学的这种观点："我们将全体有理数和全体无理数所构成的集合称为实数集 **R**。**R**={x: x 是有理数或无理数}。下面将会了解，全体无理数所对应的点(称为无理点)确实填补了有理点在坐标轴上的所有"空隙"，即实数铺满了整个数轴。这样，每个实数都可以在坐标轴上找到自己的对应点，而坐标轴上的每个点又可以通过自己的坐标表示唯一一个实数。实数集合的这一性质被称为实数系 **R** 的'连续性'。实数系 **R** 的连续性，从几何角度理解，就是实数全体布满整个数轴而没有'空隙'，但从分析学角度阐述，则有多种相互等价的表述方式。"①

但是，把几何图形理解成和空间没有任何关系的点集，将导致这样的结果，比方说：在欧几里得几何中，线是没有长度的。对于一个普通的集合来说，元素有没有大小，元素间有无距离是无关紧要的，但是对于欧几里得几何来说长度(距离)是至关重要的，否则整个欧几里得几何将变得毫无意义。

如果我们一方面认为线是由点组成的，另一方面却又认为点是没有任何延展的，那么从清楚的逻辑来看，我们的结论必是：线是没有长度的，因为人们无法只从 0 那里获得长度。

不过，这种矛盾一直被数学家所忽视或容忍。从有欧氏几何以来就已经如此。我们可以看一下欧几里得本人对点线面的理解，这种对点线面的理解在后来的欧氏几何的发展中并没有本质的改变：

定义 1.1（点）　点不可以再分割成部分。

定义 1.2（线）　线是无宽度的长度。

定义 1.3（直线）　直线是点沿着一定方向和相反方向无限平铺。

① 陈纪修，等．数学分析：上册．北京：高等教育出版社，2004：26.

定义 1.4（面） 面只有长度和宽度。[①]

显然，在欧几里得的定义里，线是由点组成的(定义 1.3)；不过，从欧几里得对点的定义(定义 1.1)来看，他并没有说点是没有任何延展的，他只是强调了点的"原子性"。但是，我们可以推知点是没有延展的，因为照欧几里得的理解，线是无宽度的长度，那么两条线相交如何有交点呢？

如果宽为 A 的带子和宽为 B 的带子相交(为了论述的简单性，假设它们正交)，那么有一个相交面，此面的面积是 $A \cdot B$；如果两个没有宽度的线相交，交面必为 0，因为 $0 \cdot 0=0$，否则线就是有宽度的，这与欧几里得对线的定义不符合。交面为 0 是什么意思呢？是说两条线根本就没有相交吗？如果没有相交，当然也就没有交点。如果承认两条线相交没有交点，那么欧几里得几何学也就垮台了。所以，两条线相交必须有个交点(哪怕是个硬性的规定)，并且该交点必须没有任何延展，否则将与线的定义矛盾。

但是，这样一来，还是回到了我们先前面临的矛盾：没有任何延展的点是如何组成有长度的线的？

也许，熟悉现代数学的读者会说，在现代几何学中，人们并不需要对点线面作出清楚的定义，它们都属于不定义概念，就像希尔伯特所说，欧几里得关于点线面的定义，在数学上其实并不重要。它们成为讨论的中心，仅仅是由于它们同所选择的诸公理的关系。其实我们可以用桌子椅子啤酒杯或者别的什么东西来代替点线面，对它们来说，公理所表述的关系都成立。[②]

现代数学在这一方面是深刻的，也就是说，在讨论元素间的关系时，元素叫什么不重要，元素是什么也不重要，对元素作具体的

---

① [古希腊]欧几里得. 几何原本. 燕晓东，编译. 北京：人民日报出版社，2005：26.

② 参见：[美]康斯坦丝·瑞德. 希尔伯特. 袁向东，李文林，译. 上海：上海科学技术出版社，2005：69.

定义也是多余的。重要的是公理集，只要这些元素满足这些公理所表述的关系就可以了。但是，无论如何，只要涉及测度（长度、面积、体积等），从元素出发去获得连续，进而定义测度就是有问题的。问题与上面的一样，无论元素是什么，只要它们是（现代数学定义的）连续的，并且我们把一种测度赋予了它们，我们仍然要问：这些单个的元素有非0测度吗？如果有非0测度，那么这就意味着一个构成了连续统的有界集合只能含有有限个元素，这与现代数学对连续性的定义不符合；如果测度为0，我们的问题依然是，非0测度是如何从没有任何延展的元素集合获得的。现代数学如何回答这个问题呢？如果说现代数学不能满意地回答这个问题，那么声称几何学不需要“空间直观”就是没有充分根据的。难道，现代数学要宣布一切度量几何是非法的吗？显然不可以，可以这么说，没有了度量几何学，也就没有了几何学。就像希尔伯特指出的那样，数学有其经典部分，当这样的部分面临危机时，我们需要做的是拯救它，寻找更加合理的方式解释它，而不是对它进行大砍大杀，把自己不好处理的地方都舍去。

现代数学当然不会束手待毙，它拥有测度论来解决这样的问题。现在就让我们把目光转向测度论。

第三节　现代测度论对以上疑问的回答与现代测度论带来的怪异情况

我们先来简单地了解一下现代测度论：根据现代测度论（在这里为了行文的方便和容易被理解，我们只考虑一维实数点集的情况），单点集、有理数集、实数集都是可测集。单点集、有理数集的测度为零；实数轴上从0到1的实数集合的测度就是1，更一般地，从 a 到 b 实数点集的测度是 $b-a$。

那么，无理数集合有测度吗？现代测度论的回答是：有，并且有非0测度。道理很简单，比方说对于实数单位区间[0,1]，单位

区间是有测度的，它的测度是1；另外我们知道，根据现代数学，实数是连续的，实数由有理数和无理数组成，并且有理数的测度是0；综上，集合$[0,1]\cap I$（I这里表示无理数）的测度应该还是1。这看起来有些奇怪，因为在数学中，我们很容易证明，任何两个无理数之间都有无穷多个有理数，而现在，对于单位区间来说，我们去掉了其中所有的有理数，这个区间应该是“漏洞百出”了，但它的测度却仍然保持不变，仍然是1。

不仅如此，在实数轴上取一个单位区间，去掉所有的有理数，去掉所有的代数无理数，现在剩下的只是些无理超越数，虽然在这个单位区间里我们甚至不能举出几个超越数的实例，但这个由这些超越数组成的集合的测度等于原来单位区间的测度。为什么会这样呢？因为现代测度论规定：可数点集的测度都是零，这里的可数也包含可数无穷多，而代数数只是可数无穷多的。现代测度论的规则是：一个点集的测度是否为0，要看它的点是否可数；如果它的点可数，那么它的测度就是0，如果不可数，这个集合才可能有非0测度（之所以这么说，因为也存在不可测集）。

从现代测度论给我们的理论出发，就可以回答我们以上的疑问了：一个实数集合（比方说单位区间）虽然是由单个的点组成的，并且这些单个的点的测度都为0，但是由于这些点的个数是不可数的多，所以这个实数集合是有非0测度的。

在不考虑不可测集的情况下，我们可以这样来总结：因为不可数，所以有非0测度。奇怪吧，虽然单个的点都没有测度，但是由于你没有办法数得清它们，于是这些点组合在一起就魔术般地产生了测度。（难道你不认为这是魔术吗？）

如果你认为现代测度论对“点线关系”的回答是令人满意的，那么我们就再看一个由现代测度论导致的奇异结果：巴拿赫-塔斯基（Banach-Tarski）悖论。这个悖论可以这样形象地来描述：我们有一个像地球一样大的实心球体，现在我们把它分成有限份，然后我们可以把它重新拼装成像篮球一样大的实心球体。如果你不了解证

明的细节，这也没有什么关系，这个结论从直观上讲已经是十分荒谬的了。但这个悖论与以往的悖论并不一样，它是从现代测度论出发的、严密的逻辑推论。

现在我们再稍微涉及一下不可测集。不可测集的存在让数学家感到很不舒服。如果没有不可测集的存在，数学家原本可以这样来安慰自己：测度论的规定虽然怪了一些，导致的结果奇特了一些，但它逻辑上优美，使用起来会带来很多便利，况且奇怪的东西人们总是会习惯的。遗憾的是，不可测集的存在破坏了测度论的逻辑上的优美性。一个人，要么是单身汉，要么已婚，这是逻辑上优美的；同样，一个点集，要么有测度，要么没有测度，即测度为0，这也是逻辑上优美的。但是"一个点集有无测度是不可判定的"就像"一个数学命题的真假是不可证明的"一样，逻辑的优美性在这里无论如何也说不上了。

如果你对不可测集发生了一些兴趣，我们现在就看一个实在的不可测集的例子：

我们考虑一个一维实数集合$[a,b]$，它的测度当然是$b-a$。现在，对于$[a,b]$中的所有实数点x与y，若$x-y\in\mathbf{Q}$，就记为$x\sim y$，这是一个等价关系，根据这一等价关系，我们可以把$[a,b]$中的所有实数点进行分类，凡有等价关系者均属一类。由这个分类可知，所有的有理数是属于一个等价类的，因为有理数减去有理数还是有理数。现在我们可以从每一个等价类中挑选出一个元素来组成一个新的集合，这个"选择集"就是不可测集。

现在简述一下原因，如果这个"选择集"是可测的，那么只有两种情况：要么它的测度是0，要么它的测度不是0。现在分别考虑：

如果它的测度是0，那么根据可测集合的测度具有平移不变性，我们将得到这样的结果：原来的一维实数集合$[a,b]$的测度是0，这显然是错误的。（所谓的平移不变性就是：$m(E+\{x^*\})=m(E)$，在一维的情况下很简单，就是说，把$[a,b]$平移到$[a+x^*,b+x^*]$，

它的测度保持不变。)

如果该“选择集”的测度不是0，这就意味着在该选择集中存在点y与z，并且$y-z=x$，x是有理数，但这是不可能的，因为这与该选择集的构成矛盾。①

现代数学还有自己更严重的问题——连续统假设。连续统假设很集中地反映了“集合论”的问题。

第四节　连续统问题

连续统假设被希尔伯特在《数学问题——在1900年巴黎国际数学家代表会上的讲演》中称为数学中的头号问题，可见这个问题的重要性。在《数学问题》中，连续统假设的名称是“康托的连续统基数问题”，希尔伯特对它的表述是这样的：“每个由无穷多实数组成的系统，即每个(无穷)数集(或点集)，或者等价于自然数的集合1,2,3,…，或者等价于全体实数的集合，从而等价于连续统，即一条直线上点的全体；因此，就等价关系而言，只有两种(无穷)数集，可数集和连续统。”②(希尔伯特的这个表述现在被称为狭义连续统假设，因为还有广义连续统假设)希尔伯特认为，这个定理(其实是假设)是非常重要的，他说：“由这条定理，立即可以得出结论：连续统所具有的基数，紧接在可数集基数之后；所以这个定理的证明，将在可数集和连续统之间架起一座新的桥梁。”③

如果说人们能在可数集和连续统之间架起一座桥梁，那么很多

---

① 例子来源于周民强编著的《实变函数论》第二章，由北京大学出版社2001年出版。由于符号使用等原因，例子有简化，但没有任何实质影响。

② 大卫·希尔伯特．数学问题——1900年在巴黎国际数学家代表会上的讲演．//邓东皋，等．数学与文化．北京：北京大学出版社，1999：228.

③ 大卫·希尔伯特．数学问题——1900年在巴黎国际数学家代表会上的讲演．//邓东皋，等．数学与文化．北京：北京大学出版社，1999：228.

数学问题将会得到解决。但是遗憾的是，自从希尔伯特提出这个问题以来，已经有一百多年过去了，这个问题并没有如数学家所愿地解决。在这一百多年里，很多数学家都对此付出了巨大的努力。1940 年，哥德尔用构造模型的方法证明了：连续统假设与我们现在常用的集合论系统——策梅罗-弗兰克尔(ZF)系统是无矛盾的，当然，前提是策梅罗-弗兰克尔系统本身是一致的。这个看起来是一个有利于证实连续统的结果；然而，在 1963 年，斯坦福大学的数学教授柯恩(Paul Cohen)证明了：在策梅罗-弗兰克尔系统是一致的情况下，连续统假设并不能基于它而得到证明。综合他们两人的证明，我们看到：连续统假设在策梅罗-弗兰克尔集合论公理系统中既不能证明是错误的，也不能证明是正确的，所以它是不可判定的。①

有趣的是，数学家福莱灵(Chris Freiling)在 1986 年却给出了一个“连续统假设”的否定性证明。他在结合集合论和测度论(以及和测度论相关的现代概率论)的情况下证明了：如果连续统假设是成立的，就会得到矛盾。他的证明在原则上并不难理解，但是要用到集合论和测度论(以及相关的概率论)的一些规定和推论，由于介绍集合论和概率论的基本规定和推论要占用很多篇幅，所以我们在这里就不详细摘录这个证明了，有兴趣的读者可以阅读 *Philosophy of Mathematics*②的第十一章(第 179 页到第 198 页)，那里有对这个证明的很清楚的和令人满意的介绍。

但是 Chris Freiling 的这个证明却普遍地受到了主流数学家的忽视或者否定。*Philosophy of Mathematics* 的作者认为，原因可能是 Chris Freiling 在证明的过程中用了思想实验等不是严格“集合论符

① 参见：[美]Moris Klein. 数学：确定性的丧失. 李宏魁，译. 长沙：湖南科学技术出版社，2007：350-352.

② James Robert Brown. Philosophy of Mathematics. New York and London：Routledge，2008.

号化”的方法。但是，还是有一些数学家是欢迎 Chris Freiling 的证明结果的，比方说 David Mumford，他曾在 1974 年因为他在代数几何方面的工作获得过数学界的最高奖——菲尔茨奖(Fields Medal)。在 David Mumford 看来，Chris Freiling 的工作和哥德尔的(指哥德尔的不完全性定理)一样重要。我们在这里提到 David Mumford 对 Chris Freiling 工作的认同，就算是一个“伟人论证”吧！通常人们不太听得懂和自己观点不同的人的话，直到有“伟人”也这样说，他才能听得懂。这本来是一件很奇怪的事，但是看到目前的论文中大量充斥着“伟人论证”，我们也就大概明白了：“人类的理性”一般来讲还是很脆弱的。其实，我认为，我们并不需要伟人，或者因为他是“伟人”我们才去听信他，我们需要关注的是：不论他是谁，我们要看他到底讲了些什么。在我们目前的情况下，人们只要认真弄懂 Chris Freiling 的证明就够了，或者更简单地，你只要理解我们上面对“点集”的疑问也就行了，因为它和 Chris Freiling 的证明并没有本质的区别。

鉴于“伟人论证”的威力，我们现在就以“伟人”的话结束这一章。连续统假设，用哥德尔简明的话语来说，就是：“在欧几里得空间的直线上有多少个点?”①而柯恩(Paul Cohen)对连续统假设的评价是：“CH is obviously false.”②(连续统假设显然是错误的。)

---

① 库尔特·哥德尔．康托尔连续统问题是什么? //[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：546.

② James Robert Brown. Philosophy of Mathematics. New York and London: Routledge, 2008: 178.

第四章

建基在纯直观上的数学

通过以上章节的论述，我想我们已经看到，现代数学通过集合论来获得"连续"的作法并不是十分令人满意的，它还存在着这样和那样的问题：它不仅带来一些严重违反直观的结果，而且在逻辑上它也并不是十分漂亮和干净的。与其把数学还原成集合论(建立在集合论的基础上)还不如把集合论看成数学的一个分支。

鉴于现代集合论在处理"连续性"时的诸多疑难，所以我们并不认为数学(尤其是几何学)可以还原成集合论，或者说几何可以建立在集合论的基础上。数学本质地需要"纯直观"。至此，我们才彻底回答了在第二章中提出的问题，我们认为，几何学是先天地规定空间属性的一门科学。但是就像我们在对几何学的论述中看到的那样，单单是"纯直观"还远远不能构成数学的全部，我们并不能从纯直观分析地导出全部数学，数学还需要很多其他的理想化的规定。因为我们并不是还原主义者，所以当我们说，"纯直观"能够给数学提供哲学基础时，我们的意思并不是一切数学都可以还原到"纯直观"上。我们的意思只是：在纯直观上建构数学。

在第二章中，我们已经展示了如何在纯直观空间上建立所有的几何学。至于算术，我们也并不认为可以还原成作为"纯直观的时间"，具体的算术也有着自己理想化的规定，比方说满足实数和复数的算术规律并不能都适用于四元数，比方说乘法的交换律。另

外，从给数学提供“无限”和“连续”的角度上来讲，作为纯直观的时间和空间并没有本质的差别，当然，这并不是说，在康德哲学里，时间和空间是一样的，关于这个不同，康德在《纯粹理性批判》中有很多论述，我们就不再赘述了。正因为对我们的数学哲学来说，时间和空间的差别显得并不重要，所以，算术也完全可以在作为“纯直观空间”上建构。

为了使我的观点更清楚，我认为在这里解释一下有些词汇的使用是恰当的。根据康德，时间和空间是“纯直观”，在语言上，“纯直观”是个名词，在语义上，“纯直观——时间和空间”是我们一切现象直观的纯形式，而这种纯形式是先天地在我们的内心中，我们一切的对现象的直观都离不开它，就像康德所说，“纯直观”，就一切可能的外部经验而言，它具有经验性的实在性，但同时它又具有先验的观念性。① 在行文中，我们会经常使用并不严格的表述，比方说“对时间和空间的直观中我们获得了连续”，“连续是纯直观”，我们认为这些表述都没有大的危害，因为我们想强调的只是：“连续”并不是从外部现象中获得的，也不是从点集序列中构造出来的。用康德式的话说，就是：连续性是先验地归属于作为观念性的时空的。

第一节　作为“一般本质”的理想化的规定与注意力的方向

一、“自由变更”作为获得“理想化的规定”的一种方法

如前所述，我们认为“无限”和“连续”来源于“纯直观”。不

① 参见：[德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B44/A28.

过，就像我们在上面反复强调的那样，单单是“纯直观”并不能构成数学，数学还需要其他理想化的规定，如果说理想化的规定对于数学来说是不可或缺的，那么“理想化的规定是如何获得的”这个问题对于数学来说就显得特别重要。

理想化的规定是如何获得的？由于我们不是自然主义者（物理主义者）和还原主义者，对于这个问题的回答对于我们来说就相对比较轻松，因为我们并不需要把“某个理想化的规定”最终归结为“某个实在的物理刺激”。对于有些理想化的规定，比方说单位元的选取和对符号缩写之约定$\left(\text{比方说把}\tan x\text{约定成}\frac{\sin x}{\cos x}\right)$，我想，即使是对于物理主义者来说，也是没有什么问题的；但是对于另外一些理想化的规定，比方说对平行公理的不同处理，就显得更为复杂一些，因为单位元的选取和符号缩写之约定并不会引起什么本质的改变，尽管它们会带来很多方便；而对平行公理的处理就不一样，不同的处理会带来很不一样的结果，所以物理主义者总是试图从所谓的真实物理世界获取判决。物理主义者经常有这样的疑问：像平行公理这样的理想化的规定，如果它们不来源于“物理世界的刺激”，那么它们又来自于何处呢？

我们认为人类有自由创造“理想化的东西”的能力，但这并不是什么神秘的能力。用胡塞尔现象学的话来说，这种能力就是通过“自由变更”而获得“一般本质”的能力。在这里，为了对“从自由变更获得一般本质”获得一些理解，我们首先引用胡塞尔的一段话：“这个成就首先在于将一个被经验的或被想象的对象变成随意的例子，这个例子同时具有引导性的‘前像’的特征，具有一种对创造开放无限的变项的多样性来说开端环节的特征，就是说，这个成就首先在于一种变更。……这样我们自由地、任意地创造变项，这些变项中的每一个以及整个变化过程本身都是以‘随意’的主观体验的方式出现。然后会表明，在这种后构造的多样性中贯穿着一个统一……例如，一个事物的这种自由变更中，必然有一个常项作为必

然的一般形式保留下来……这种形式在随意的变更活动中呈现出自身是一个绝对同一的内涵，一个不变的，使得所有变项得以一致的某物，一个一般本质……我们可以把目光放在那个一般本质上面，它是必然的常项，这个常项为所有以‘随意’的方式进行的、并且始终持续的变更、包括哪怕是对同一个原初图象的变更，规定了界限。”①

胡塞尔的语言可能还是显得有些抽象，现在我们可以看一个简单的例子：我们的自由变更可以从一个经验中的事物出发，比方说，摆在我们面前的一本红色封皮的书。从这本红色封皮的书出发，我们可以自由地想象任何其他红色的东西，红色的门、红色的手表，等等，原则上我们可以无限地想象下去。在这里我们清楚地看到，“门”、“手表”等是变项，而“红”是常项，于是我们就获得了“红”这个“一般本质”。当然，我们也可以从想象的事物出发进行变更，比方说“一朵红云”，同样，从这个想象的事物出发，我们也可以获得“红”这个“一般本质”。另外，我们也可以从面前这本书的形状出发进行自由变更，这样我们就可以获得“长方形”这样的“一般本质”。原则上，通过这样的方法，我们可以获得所有的“理想化的东西”。“理想化的东西”就是理想化的规定，就是“理念”，但是它们没有了柏拉图主义的神秘的味道，就像胡塞尔所说：“这个一般本质便是埃多斯，是柏拉图意义上的理念，然而是在纯粹的、摆脱了所有形而上学解释的意义上的理念，就是说，对这个理念的理解完全根据它如何在以上述方式进行的观念直观中直接直观地被给予我们的那样。”②

在这里我们有必要作一些澄清，我们区分“纯直观”和“一般本

① 埃德蒙德·胡塞尔．通过本质变更进行的本质直观．//倪梁康．胡塞尔选集：上册．上海：上海三联书店，1996：498.

② 埃德蒙德·胡塞尔．通过本质变更进行的本质直观．//倪梁康．胡塞尔选集：上册．上海：上海三联书店，1996：498.

质（理想化的规定）”。我们认为，“纯直观”比“一般本质”更朴素、更基础，因为我们在作自由变更的时候，已经有“纯直观”作为其可能性条件了。“纯直观”作为基础是强迫性的，而“一般本质”作为常项只是相对于某些具体的自由变更而言的，我们可以在不同的方向和角度上进行自由变更，在原则上，自由变更允许着无限的自由，正因为如此，在我们只需要某些“一般本质”时，我们需要把我们的注意力集中在这些“一般本质”上，而不让自己受其他的“一般本质”的干扰。

自由变更确实是“自由的”，它不被还原成物理的刺激，注意到这一点是很重要的。如果说通过自由变更所获得的“一般本质”事实上都可以还原成“物理的刺激”，那么“自由变更”就是被取消了；所有的“一般本质”都将一一对应着某个“物理刺激”，也就是说，“一般本质”是由“物理刺激”直接引起的。对于这样的物理主义来说，如果存在不与某个物理刺激对应的“一般本质”，那么这个“一般本质”就是彻底虚幻的东西，因此应该予以抛弃。如果物理主义是对的，那么数学和物理学的界限将变得很模糊，虽然我不去断言这是一件十分糟糕的事情，但是无论如何，数学所表现出来的纯粹性将很难得到解释。

二、“物理刺激”与“注意力的方向”

现在，我们稍微详细一些地关注一下“物理刺激”的问题，给强物理主义者一些反驳。为了讨论的方便，我们先引用库恩在《科学革命的结构》的一段话作为我们讨论的基础：

“如果两个人站在同一个地点并注视同一个方向，我们即使冒着唯我论的风险，也必然推断他们受到几乎相同的刺激（要是两人能使他们的眼睛处于同一个位置，刺激将会是同一的）。但是人们看不见刺激；我们对于它们的知识是高度理论性的和抽象的。另一方面，人们拥有感觉，而且我们不必去假定两个观察者的感觉是同样的（怀疑论者或许还记得在 1794 年约翰·道尔顿描述了色盲之

前，没有人注意过它）。相反地，许多神经过程发生在受到刺激和意识到感觉之间。我们所确切的是：极为不同的刺激能产生相同的感觉；同样的刺激能产生极不相同的感觉；最后，由刺激到感觉的途径部分地为教育所制约。在不同社会里培育出的人在某些场合，像是看到了不同的事物。如果我们不再试图鉴定刺激和感觉间的一一对应，我们或许会认识到他们事实上确实看到了不同的事物。"①

从以上的引文我们可以看出，库恩相信刺激和感觉之间不能建立起一一对应的关系，但是他同时又相信，人们可以拥有相同的刺激。关于这一点，库恩确实表现得像是一个物理主义者，虽然，我们知道他并不是一个真正的物理主义者，但是，如果说我上面引用的那段话可以看做是库恩对物理还原主义的反驳的话，那么库恩仿佛一开始就承认了物理主义的一些前提。而我们，从康德的先验哲学出发，并不去断言我们"拥有相同的刺激"。

"拥有相同的刺激"，这到底是什么意思呢？我们如何能够断言我们拥有"相同的刺激"呢？

现在我们看一个具体的例子：

把一些形状和颜色各不相同的物体放在 A 和 B 两人的面前。A 在描述这些物体时，他说，"我们可以把它们分为五类：红的，黄的，蓝的，绿的，紫的。"B 在描述这些物体时，他说，"我们可以把这些物体分为四类：方的，圆的，三角形的，长条形的。"现在，我们突然问 B，让他用颜色分类面前的物体一共可以分为多少类，他可能一时答不上来。

现在我们的问题是："刚才，A 和 B 在看着这些面前的物体时，他们是否有同样的刺激呢？"按照库恩的想法，他们应该拥有同样的刺激，因为他们的眼睛"看"的是相同的东西。那么他们为什么

① ［美］托马斯·库恩．科学革命的结构．金吾伦，胡新和，译．北京：北京大学出版社，2003：173.

会有不同的描述呢？库恩会说，刺激和感觉不是一一对应的，他们把这些感觉描述出来，当然会有不同的描述。这样的解释恰当吗？同样的一个“刺激”，一个人把它感觉成了颜色，另一个人把它感觉成了形状！这难道不是很神秘吗？我们凭什么说“我们拥有相同的刺激”？这显然是没有任何根据的。也许有人说，这只是一个假设。但是，这个假设能给我们带来什么解释上的方便吗？我看不能，它带来的更多的是神秘。

我认为，谈论“相同的刺激”和谈论“相同的内心感觉”一样，是没有意义的，因为我们对此没有任何判断的依据，“相同”是主体间性词汇，而“刺激”和“内心感觉”是私人词汇，它们具有语义上的不匹配性。我们必须从别的角度来理解“对事物的不同描述”产生的原因。

就像我们从胡塞尔的自由变更中学到的那样，在作自由变更时，起关键作用的是：注意力的方向，比方说我们把我们的注意力保持在“红”上，其他的都是无关紧要的，通过自由变更，我们就得到“红一般”。用类似的方法，我们也可以消除刺激和感觉经验的神秘联系。我们认为，我们的感觉经验总是与我们的“注意力的方向”联系在一起的。在上面的例子中，A 的注意力可能停留在这些物体的颜色方面，B 的注意力可能是在这些物体的形状方面。“注意力的方向”并不是一个实实在在的物理方向，比方说，东西南北等，但“它”也并不因此堕入“唯我论”，原因很简单，因为“注意力的方向”原则上是可以用语言来表达的，从而人们就可以比较“注意力的方向”是否相同。比方说，观察眼前的物体可能有很多视角——很多注意力的方向（理论上可以假设有无穷多种），我们总可以说，从颜色上讲，从形状上讲，从质量上讲，从数量上讲，等等。但是，我们要清楚的是，无论人们的“注意力的方向”相同或者不同，我们都没有任何用来衡量“刺激相同与否”的标准。

我们情愿说由于“注意力的方向”的不同导致我们有不同的描

述性的经验，而不去神秘地说，对于“相同的刺激”我们却有着不同的感觉经验，因为“注意力的方向”有着更多的主体间性的客观性。

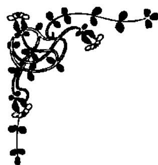
如果我们承认了“注意力的方向”对于感觉经验的根本上的重要性，那么物理主义就很难对“观念直观”到的“一般本质”形成真正的打击。从上面的例子中我们可以看出，彻底的物理主义的作法拥有着比“观念直观”更多的神秘性。

也许人们还会有这样的问题：人们为什么经常有差不多相同的“注意力方向”呢？简单地回答，这与具体的人群的生活环境（自然的或者文化的）、他们所受的教育以及利益爱好等有关。人们也很容易有这样的假设：如果说一群人在差不多相同的环境下长大，接受了差不多相同的教育，并且在共同的价值取向下产生了差不多相同的利益追求和爱好，那么他们在与“外界”打交道时，就差不多会有相同的“注意力的方向”。另外，值得我们稍微注意一下的是，“注意力的方向”可能最终与人类的生存（survive）有关。就像库恩所说：“在许多环境中，一个团体若不能区分狼和狗的话就不能生存。”①但是，我觉得应该把这句话稍微修正一下，不是“不能区分”，而是“不去区分”，因为，一般地，总有些经验性的标志可以把狼和狗区分开来，“不去区分”倒是一个“注意力的方向”的问题。比方说存在这样一个部落，对于这个部落的人们来说，把注意力放在狼和狗的区分上是性命攸关的，把注意力放在区分质量和重量上很可能是浪费精力的，是不利于个体存活的。

但是，正是“注意力的方向会受到人类生存的左右”这一点更加彰显了“注意力方向的本源的自由性”。

---

① ［美］托马斯·库恩．科学革命的结构．金吾伦，胡新和，译．北京：北京大学出版社，2003：175.



插录
胡塞尔小传

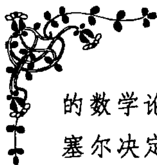


胡塞尔(Edmund Husserl)1859年4月8日生于普洛斯尼茨(Prosnitz)，是哲学家和数学家。根据出生地，胡塞尔是奥地利人，他在37岁的时候获得普鲁士国籍。

胡塞尔是现象学的创立者，通过现象学的方法他试图把哲学变成严格的科学。他是20世纪最有影响的哲学家之一。胡塞尔很多产，他的遗著大约有40 000页。自1950年以来，他的著作在胡塞尔全集的框架下出版。胡塞尔对存在主义哲学家梅洛庞帝、萨特和海德格尔的影响很大。阿多诺也在其上建构自己的思想。在社会学方面，尤其是绪茨(Alfred Schütz)让胡塞尔的思想成果丰富。在现代思想家中，受胡塞尔影响很大的是列维纳斯(Emmanuel Levinas)。

胡塞尔是犹太布商的儿子，排行第二，1876年中学毕业。紧接着，也就是说，在17岁的时候，胡塞尔进入莱比锡大学学习天文、数学、物理和哲学，曾师从温特(Wilhelm Wundt)。1878年，19岁的胡塞尔在柏林跟从著名的数学家维尔斯特拉斯(Karl Weierstrass)和克诺内克(Leopold Kronecker)学习数学。1882年，他在维尔斯特拉斯的学生柯尼斯伯格那里以题为《对变量计算理论的贡献》





的数学论文获得博士学位。在哲学方面，布伦塔诺给了胡塞尔决定性的影响，在跟从布伦塔诺学习哲学后，他到哈勒师从布伦塔诺的学生斯杜姆普夫(Carl Stumpf)继续研习哲学。1887年，28岁的胡塞尔以《论数的概念》的心理学/数学论文获得了教授资格。在哈勒，胡塞尔做了14年私人讲师。就是在哈勒，胡塞尔撰写了自己早期的主要著作《逻辑研究》，该书使胡塞尔声名大振。1887年，胡塞尔和自己的未婚妻(Malvine Steinschneider)在维也纳受新教洗礼，随后两人结婚。

胡塞尔的著作《算术哲学》(1891)引来了逻辑学家弗雷格的批评性关注。为了答复弗雷格对其心理主义的批评，胡塞尔在原来的基础上大大地丰富了自己的第一部著作《逻辑研究》。1901年，42岁的胡塞尔得到了哥廷根大学的聘任，先是做副教授，1906年起做正教授。在哥廷根的15年时间里，胡塞尔与希尔伯特、奈尔森、狄尔泰、考义雷(Alexandre Koyré)、舍勒、雅斯贝斯以及诗人霍夫曼塔尔熟识。

胡塞尔的儿子在第一次世界大战中阵亡。1916年，胡塞尔到弗赖堡接替新康德主义者里卡尔特(Heinrich Rickert)的教席。为此被聘任，胡塞尔自选的著作是《纯粹现象学和现象学哲学的观念》。1918年，胡塞尔建立起“弗赖堡现象学学会”，其间海德格尔曾做过他的助手。1928年，海德格尔接替了胡塞尔的职位。

胡塞尔的第三部著作是《欧洲科学的危机》，其间先验现象学产生了。在这个阶段，“生活世界”位于胡塞尔哲学的中心位置。





但是誉满天下的胡塞尔在他生命的最后年月里却感受到了纳粹的非人道。1933 年 4 月 6 日，校长骚尔(Sauer)签发巴登公告，胡塞尔被停职。但是在胡塞尔的学生海德格尔任校长期间，该停职公告于同年 7 月 20 日被解除了。就在同一年，胡塞尔接到了洛杉矶南加利福尼亚大学的聘任，但是他拒绝了。1936 年，77 岁的胡塞尔被取消了授课权，并经历了许多其他的刁难。1937 年，胡塞尔夫妇还被赶出了弗赖堡的住所。在弗赖堡住所存放的速记原稿于 1939 年在一个极其冒险的行动中到达了比利时方济各会神甫范·布雷达(Herman Leo Van Breda)的手上，他在比利时的卢文(Löwen)建立了胡塞尔档案馆。1938 年 4 月 27 日胡塞尔去世，他的骨灰被安葬在弗赖堡-君特斯塔尔公墓(Friedhof in Freiburg-Günterstal)。



第二节 在建基于纯直观的数学中实数集只作为标记集

从第三章中我们知道，按照现代数学的观点，实数集是连续的；而我们认为“连续”是本源地属于纯直观的。我们怀疑实数的连续性，那么，从我们的观点出发，我们怎么看待实数呢？实数在我们的建基在纯直观的数学中处于什么位置呢？

我们的回答是简单的：实数集作为标记集。说一个标记集是连续的，或者有什么样的测度，这是没有意义的，问一个单一的标记本身在尺寸上有多大也是无关紧要的。标记只是符号。

如果说实数集是标记集，那么实数在标记什么呢？我们跟随康德，认为实数是对量的标记，确切地说，实数通常是对不同的测量

“量”以及“对量的运算的结果”的标记。不同的量和对量的运算的不同结果需要不同的标记，这是我们需要实数的一个自然而然的方式。就像王浩所说：“长度和体积的测量是算术和几何的结合，应用各种单位以计算一个数。正像方程的解那样，这是产生分数和物理数的一种自然方法。要求绝对精确的，更确切地说可以无限地改进的测量就产生了‘实数’这一概念。”①

从“实数是标记集”的观点出发，我们对解析几何的看法也必将偏离主流数学家，我们不认为实数和数轴上的点一一对应，我们认为实数和数轴上的线段(“纯长度”)一一对应。对此，我们需要一些解说：什么是纯长度呢？我们还是从康德那里汲取营养，为了说话的方便，我们再次引用康德关于“纯直观”的话：“假如我从一个物体的表象里把知性所想到的东西如实体、力、可分性等都除开，同时又把属于感觉的东西如不可入性、硬度、颜色等也除开，那么我从这个经验的直观中还余留下某中东西，即广延和形状。这些东西属于纯粹直观，它是即算没有某种现实的感官对象和感觉对象，也先天地作为一个单纯的感性形式存在于内心中的。”②在这里，康德告诉了我们如何能够获得与感性经验无关的纯形式——纯粹的广延和形状。借助一些理想化的规定(比方说欧几里得度规)，我们很容易地就可以从“纯形式”当中获得纯粹的几何量，比方说，纯粹的长度、面积、体积等。为了实数的原因，这里我们只关心纯粹的长度就够了。于是，我们就可以这样来规定，每一个不同的实数对应一个不同的纯粹长度，由于纯长度是从纯直观中获得，所以每一个纯长度都是连续的。

---

① 王浩．数学的理论与实践．//邓东皋，等．数学与文化．北京：北京大学出版社，1999：97.

② ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：B35/A21.

这样，实数原则上就可以摆脱经验性地测量"量"，所以它们可以不再是一些经验测量"量"的标记，而是"纯长度"的标记，于是实数通过"纯直观"也就获得了它的先天性。我们同样认为，解析几何建立起了代数与几何的联系，但是，如前所述，我们认为实数对应的不是数轴上的点，而是数轴上的线段(纯粹长度)，0 对应的是纯粹长度为 0 的线段。实数集只是标记集，也许，在某种程度上讲(比方说，在不考虑纯粹长度的方向的情况下)，它是一个完备的标记集，但这个集合与连续与否并没有关系。

第三节　来源于纯直观的"连续"如何获得自己的可操作性

这一节虽然不是本书的重点，但它也不是彻底不重要的，因为数学本质上是需要可操作性的，我们不能总是重复说："连续来源于纯直观，连续的就是连续的"。所以在这里，我也稍微地展示一下我们的理论是完全具有可操作性的，为了本书的完整，也为了增加本书的说服力。不过，鉴于本书的限制，也请原谅我在这里不能详细地说明一切。

对于我们的目的来说，"连续"的可操作性是与无穷小量紧密地联系在一起的。量的连续变化意味着"量可以以每次相差无穷小量的方式发生变化"。从我们的数学哲学出发，我们必须认真对待无穷小量。

无穷小量在微积分的发展史上所作的贡献是巨大的，但是数学家们对它的疑虑却一直存在，总是试图消除它，在众多的不成功的尝试之后，最后终于被现代数学抛弃了，无穷小量被极限理论所替代，就像《微积分概念发展史》的作者所说："尽管从牛顿和莱布尼茨时代到波尔查诺和柯西时代，许多数学家都避免使用无穷小量，但是也许只有魏尔斯特拉斯毫不含糊的符号表示，才可看做是有效

地从微积分里排除了持久不散的固定无穷小概念。"①但是无穷小虽然被人们从前门赶了出去，但是实无穷集却又从后门溜了进来。

其实，在数学史上，无穷小给当时数学所带来的混乱和现在的实无穷集合给现代数学所带来的混乱很有相似的地方。希尔伯特对此也有类似的看法，他说："情况完全与在微积分的发展中发生过的事相似。……矛盾渐渐开始出现。"②从康德哲学的角度去看，无论是无穷小量还是实无穷集合，它们的问题都是超越了可能经验的界限，因此，对此我们不可能再有任何直观。

我们在上一章中已经看到，现代数学中的用"点集或数集"的方式来构造连续和定义测度的做法存在着根本的困难。根据上述原因，我们重新引入无穷小量。但是，考虑到无穷小在数学史上引起的麻烦和康德的深刻的告诫，我们并不引入固定的"无穷小一般"。以上我们论述了，实数并不对应数轴上的点，而对应数轴上的纯粹长度(线段)，现在，我们如何处理无穷小呢？我们作这样的约定：无穷小量不对应任何给定的实数，因为无穷小不可能是任何给定的纯粹长度，每一个给定的纯粹长度(它对应唯一的一个实数)都包含无穷多个无穷小量(无穷小线段)，换句话说，就是在实数轴上，任何两个实数(标记)间的距离都是无穷多个无穷小，这样我们也就引入了"无穷多"。在这里，虽然我们也需要无穷小和无穷多，但是我们看到，通过以上的规定，我们的无穷小和无穷多都依赖于一个既定的"纯粹长度"，而这个纯粹长度我们是可以直观的，它本身就是纯直观，这样我们就避免了固定的"无穷小一般"和"无穷多一般"，在某种程度上，我们也就顾及了康德的深刻的告诫。其实，我们这样来理解连续和无穷小的关系，与康德的本意相差并不

① [美]波耶．微积分概念发展史．唐生，译．上海：复旦大学出版社，2007：280.

② 大卫·希尔伯特．论无限．//[美]保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003：218.

是很远，康德说："量的这样一种属性，即据此它们身上的任何一个部分都不是可能最小的部分（任何部分都不是单纯的），就叫做量的连续性。空间和时间都是 quanta continua（拉丁文，连续的量），因为它们的任何一个部分都不可能没有将之包含进两个边界（两个点或两个瞬间）之间就被给予出来，因而以至于只有当这个部分本身又是一个空间和一个时间时才被给予出来。所以空间只是由诸空间构成的，时间只是由诸时间构成的。点和瞬间只是一些边界，即只不过是对它们限制的位置；但这些位置任何时候都是以那些它们所应当限制或规定的直观为前提，而单是由这些位置中，即从这些也许还在空间或时间之前就可能被给予出来的组成部分，是既不能复合出空间，也不能符合出时间来的。"①

从这段引文我们清楚地看到，在康德那里，"点"和"瞬间"只是些标记，对边界的标记，而通过"点"和"瞬间"是绝对复合不出空间和时间的，换句话说，是复合不出"连续性"的，相反，"点"和"瞬间"是以"作为纯直观的空间和时间"为前提的。在这里，康德没有提到无穷小量，但是康德的意思很明显，任何一段时间和空间都是无限可分的。从这样的观点里完全可以产生"无穷小量"这样的概念；不过，康德本人没这样做，他没有用"无穷小量"来把握连续性，而是用"流失的量"来把握连续性。我想我们的做法本质上与康德没有什么不同，但是依赖于给定纯粹长度的无穷小会给数学运算带来很多方便，因为任何给定的"纯粹长度"都可以分割成无穷多个无穷小，所以在"纯粹长度"固定的情况下，无穷小可以看成单位无穷小；对于数轴来说，一个给定的"纯粹长度"就是在实数轴上固定的两个实数 a 和 b 之间的距离。

但是在"纯粹长度"（区间）没有给定的情况下，无限多个无穷

---

① ［德］康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A170/ B212.

小的和可能是任意值，所以这个地方要特别注意，因为这样的加法原则上是不合法的；而有限多个无穷小的和却总是无穷小。从给定区间产生的单位无穷小出发，我们还可以通过运算产生各种各样的无穷小，但不要忘记，它们都是建立在原来的单位无穷小的基础上的，所以它们并不总是相同的无穷小，并且从这个单位无穷小出发，我们还可以构造高阶无穷小，仿照给定区间与其无穷小的关系，我们可以很自然地约定：无穷多个 n 阶无穷小的和等于一个 $n-1$ 阶无穷小。同样，我们不应该忘记的是：由不同的区间产生的单位无穷小是不等的。

现在我们就可以不用极限理论，而是用无穷小来检验某个函数的连续性，或者求某个函数的导数。不过，考虑到单位无穷小总是区间依赖量，所以在处理具体的函数时，我们需要给出一个清楚的定义域，这一点是很容易满足的；只有在不引起任何矛盾的情况下，我们才可以没有区间限定地使用无穷小。

1. 函数的连续性（在这里，我们只考虑一元实变函数的情况，下同）

对于一个一元函数 $f(x)$，如果说 $f(a+\varepsilon)-f(a)=A\cdot\varepsilon+o(\varepsilon)$（$A$ 为任意一个有限的实数，$o(\varepsilon)$ 在这里表示可能的高阶无穷小），我们就说该函数在自变量取值为 a 的地方是连续的，如果怕无穷小引起误解，我们可以给自变量一个清楚的取值范围。现在我们看几个例子：

（1）函数：

$$f(x)=\begin{cases}2, & x=2,\\ 3, & x\text{ 取其他量值},\end{cases}$$

此函数在 $x=2$ 处不连续，因为 $f(2+\varepsilon)-f(2)=3-2=1$。

（2）函数：

$$f(x)=\begin{cases}2, & x=2,\\ 3, & x\text{ 取其他实数},\end{cases}$$

此函数在 $x=2$ 是否连续是不可以判定的，因为我们不知道 $f(2+\varepsilon)$ 取什么值，$2+\varepsilon$ 不是任何确定的实数，或者用非标准分析的话来说，它不是任何标准实数。所以此函数是定义不完善的函数。

（3）Dirichlet 函数：

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数,}\\ 0, & x\text{ 是无理数,}\end{cases}$$

此函数也是定义不完善的函数，它的连续与否是不可判定的。

2. 导数

对于一个一元函数 $f(x)$，如果

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}=f'(x)+A(x)\cdot\varepsilon+o(\varepsilon),$$

这里我们只要求 $f'(x)$ 形式的唯一性，那么 $f'(x)$ 就是通常意义上的导数，$A(x)\cdot\varepsilon+o(\varepsilon)$ 的结果总是一些无穷小量，所以它们并不参与构成通常的导数。

我想，我在一定程度上已经表明了：如何考虑到康德的告诫，并且从康德的纯直观出发，重新定义无穷小和无穷多，并以此得到分析学的基本结果。在此，我想再次强调，为了不让鸽子飞进没有空气的地方，我们定义的无穷小和无穷多都是“纯粹长度”（区间）依赖量，“无穷小”脱离了“纯粹长度”就是毫无意义的，而无穷多只能被理解成“潜无穷”。①

第四节　“建基在纯直观上的数学”如何看待证明

一、数学的本质与证明

人们一般认为：证明对于数学来说是本质的，只有证明才能使

① 关于无穷小的更严格的数学表述，读者可以参阅附录一。

结果确定。这句话听起来很有道理，因为数学的定理不能建立在信仰之上，数学的定理也不能建立在经验的根据上，比方说哥德巴赫猜想，到目前为止，我们的经验都支持它的正确性，但我们并不能说它已经得到了证明。照此说来，数学定理到底应该建立在什么样的基础之上呢？数学定理应该建立在"证明"的基础之上。由此可见，证明对于数学来说确实具有本质的重要性。但是，鉴于哥德尔定理，我们又不能把数学中的一切都托付给形式化证明。形式化证明本身也不是无条件的，如果说证明所依赖的公理集不是不证自明的，不是直观可信的，那么我们的确定感又来自于什么地方呢？现代数学中的标准证明都最终依赖于集合论的公理，操作上依赖于逻辑语言和符号，因为数学家相信，只有这样的证明才是合法的证明。但是鉴于集合论自身的一些问题，比方说集合论自身的一致性问题，这种数学家的信仰的合理性又在什么地方呢？

现在我们来看一个在数学分析、复变函数以及拓扑学中极其重要的定理——若尔当定理，它的表述是这样的：设 J 是 $\mathbf{C}$ 上任意一条若尔当闭曲线，那么开集 $\mathbf{C}-J$ 有两个连通分支：一个有界的称为 J 的内区域，一个无界的称为 J 的外区域：这两个区域都以 J 作为边界。①

这个定理的表述就已经很"集合论"了，其实它的意思很简单：在一个平面上，一条封闭曲线可以把平面分成两部分，曲线所包围的部分(内部)和曲线的外部；如果说，有一个生物想连续地从曲线的内部爬到曲线的外部，那么它爬行的轨迹必然与该曲线有一个交点。

我们知道，在数学中，被称做定理的东西是需要证明的。如果有人问你："你可以证明这个定理吗？"也许你会说："废话，这难道还需要证明吗？"

① 余家荣．复变函数．北京：高等教育出版社，2000：170.

我很同情你的观点，并且我相信，很多人在真正地认真阅读过这个定理的证明之后，并且在变得更加糊涂之后，他们都会同情你的观点。这个证明要用复杂难懂的符号书写上好几页才能完成。若尔当本人曾经给出过一个证明，不过他的证明又长又复杂，并且后来发现，他的证明中存在着很大的漏洞(很有意思吧，如果你直观，就不会有大漏洞)。这个定理的第一个“严格”的证明更加复杂，复杂到即使对训练有素的数学家来说，也是很难理解的。[1] 我们现在看到的已经是较为简单的证明，即使是这个简单些的证明，如果证明中的一切都用标准逻辑符号，并不允许有任何(源于直观自明的)省略，那么这个证明大概需要厚厚的一本书。当然啦！数学家没这么笨，他们不会把一切定理都从头证明起。但是，我相信，无论如何，你们已经被现代数学的“受虐狂倾向”震惊了。不单是普通人对此感到诧异，就连哲学家对此也感到诧异，叔本华在《作为意志和表象的世界》一书中这样写道：“我们既已确信直观是一切证据的最高源泉，只有直接或间接以直观为依据才有绝对的真理；并且确信最近的途径也就是最可靠的途径，因为一有概念介于其间，就难免不为迷误所乘；那么在我们以这种信念来看数学……时，我说，我们无法回避不认为数学走的路既是奇特的，又是颠倒的。我们的要求是把一个逻辑的根据还原为一个直观的根据，数学则相反，它偏要费尽心机来作难而弃却它专有的，随时近在眼前的，直观的依据，以便代之以逻辑的证据。我们不能不认为这种做法，就好比一个人锯下两腿以便用拐杖走路一样，又好比是《善感的胜利》一书中的太子从真实的自然美景中逃了出来，以便欣赏模仿这处风景的舞台布景。”[2]

---

① 参见：[美]柯朗 R，罗宾 H. 什么是数学．左平，等，译．上海：复旦大学出版社，2005：252.

② [德]叔本华．作为意志和表象的世界．石冲白，译．北京：商务印书馆，2006：114.

“锯下两腿以便用拐杖走路”，这是一个很有趣的比喻。我认为确实也说中了现代数学的某些弊端。但是我们不能完全赞同叔本华的说法，如果我们延续叔本华的比喻，用双腿来比喻直观，用拐杖来比喻逻辑符号等理想化的规定的话，那么，我更愿意说，在攀登数学高峰时，仅仅靠双腿是不能胜任的，我们还需要拐杖；但如果仅仅是使用拐杖，那不仅是错误的，而且是荒谬的。因为任何理想化的规定都受到一致性的制约，如果说完全离开了直观，而理想化的规定的一致性又得不到证明，我们还有什么权利从事数学活动呢？数学的证明也就失去了任何意义。所谓证明，通常的理解就是把一些不确定的东西建立在一些确定的东西之上；如果说，在数学中没有任何东西的确定性能够得到保证的话，那么我们的证明又意味着什么呢？

很多人认为，“集合论符号化证明”更严密，更不容易犯错误，所以它比直观证明更优越。为了能够清晰地比较，现在我们再看一下经典数学中的“零点存在定理”：如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，并且$f(a)\cdot f(b)<0$，那么在a和b之间有一个c，使得$f(c)=0$。

回忆一下在第一章中这个定理的经典证明，这个定理的证明虽然没有若尔当定理证明那么复杂，但它也是远非直观的。

现在我们来看另外一种证明：说一个函数f在闭区间$[a,b]$是连续的，意思就是：它的以$[a,b]$为自变量范围的连续变量的终端在数轴上勾画出一条连续的曲线，说$f(a)\cdot f(b)<0$的意思就是这条曲线横穿x轴，由于曲线是连续的，它和x轴必有交点，所以在闭区间$[a,b]$中必然存在c，使得$f(c)=0$。

这两个不同的证明孰优孰劣呢？这个“直观证明”真的更容易导致错误吗？从这一个例子我们丝毫也不能看出它更容易导致错误；反而，就像我们看到的，那个来源于集合论的“语言符号证明”却并不能保证自己无条件的正确性，因为集合论自身的一致性并没有得到证明。想想若尔当在证明自己的定理时所犯的错误，我

们真的能说服自己，认为："直观证明"更容易导致错误吗?

也许你会说我的这个比较是不公平的，因为在数学中存在着很多的"直观"可以导致错误的例子，比方说处处连续但不可导的曲线，可以填满矩形的曲线，等等，但我认为，这不是"纯直观"的原因。人们往往把"直观"理解成"肉眼的经验直观和视觉化"，显然，经验直观是容易导致错误的，就像我们经常会有视觉错觉，但这是具体的某个数学家的错误，对于某个具体的数学家来说，"集合论符号化方法"也同样很容易被错误地运用；另外，像构造"处处连续但是不可导的曲线"，就 Weierstrass 的例子而言，是一个很理想化的活动，所以它需要理想化的规定，但这丝毫不能说明"纯直观"本身是容易导致错误的。此外，像"填满矩形的曲线"还有着自身的困难，因为如果曲线能把矩形填满，那么矩形将没有面积，因为线是没有宽度的；如果说不能填满，那么就不存在这样的曲线。这一切又将导致用"点集"来构造"连续"的类似问题。

如果不考虑数学家的情绪，我很愿意说：集合符号化的证明只是现代数学中的时髦，它原则上和数学真理无关。

简单地陈述一下我的理由：如果你是一个柏拉图主义者，相信有绝对的数学真理，那么一个数学命题的真理性就与你如何接近和得到这个真理的方式无关，原则上，它允许你用任何可能的方式接近它和得到它；同样任何可能的方式都是有可能出错的，显然，"集合论符号化证明"也不例外，因此，它并不能宣布它相对于直观证明的优越性。如果你是一个形式约定主义者，并且你想通过你的形式约定涵盖整个经典数学，那么哥德尔定理表明，你始终摆脱不了形式系统可能的不一致性的困扰。于是你的那一大堆漂亮的符号不能向你提供任何确定的真理，这些符号的一串串的漂亮的排列也就不是什么证明；如果你搞出了一套形式，并且你证明了它的一致性，那它就和我们一直叫做数学的东西没有了太多的关系。这样就像一个人先往墙上开枪，然后根据子弹击中的地方画靶环，因为他从创造他的形式系统起，就对自己足够地好，于是他枪枪十环，

大概没有人会佩服这样的神枪手。

而对于我们来说，所谓的证明就是把数学命题还原到“纯直观”和“理想化的规定”上。在我们这里，我们也本质地需要证明，因为我们反对神秘主义。我们看一个实例，在数学中有这么样一个奇妙的等式：e 的 iπ 次方等于-1。[①] 这显然是很不直观的，因为 e 是自然对数的底，是一个无理数，e≈2.718…，i 的平方等于-1，而 π 是圆周率，也是一个无理数，π≈3.141…。e 的 iπ 次方怎么会等于-1 呢？所以说，数学中的证明是绝对必要的，否则就会导致神秘主义和放弃理性的无条件的接受。但是，证明的含义是按照我们的方式所理解的，即不是把本来很直观的东西搞得很不直观，而是把不直观的东西和一些直观的东西联系起来。从我们这种观点出发，我们会认为若尔当定理的正式证明很像是叔本华讽刺的，锯下两腿以便用拐杖走路的证明。在直观上，若尔当定理是相当清楚的，就像两点之间直线最短一样，从康德的数学哲学出发，我们会说，这是一个先天综合命题。

二、“理想化的规定”和证明

鉴于数学并不能还原成纯直观，所以数学证明也并不能总是只依靠纯直观，数学证明总是需要这样那样的理想化的规定，比方说对条件的理想化的规定，对符号缩写的规定，等等，虽然有些东西由于历史和文化的原因，我们没有明确地说出它们，我们默认了它们，但是，如果它们要获得数学的纯粹性，正式地进入数学，它们必须是理想化的规定。因此，从某种意义上讲，证明并不意味着把数学命题还原到“纯直观”和既定的“理想化的规定上”，因为既定的理想化的规定也许还不存在，而是“严格证明的试图”迫使我们

① 此等式在数学中是一个奇妙的等式，它是恒等式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 的特殊情况，有兴趣的读者可以参阅附录二。

必须把什么样的条件作为“理想化的规定引入数学”。

现在我们来看一个具体的例子——多面体的欧拉(Leonard Euler，1707—1783)公式，以此来说明“证明”、“直观”和“理想化的规定”之间的关系。多面体的欧拉公式是这样的：对任意一个多面体，如果我们用 V 表示顶点数，E 表示棱数，F 表示面数，则总有这样的关系：$V-E+F=2$。如果你觉得这样有些抽象，你可以做一个正立方体，数一数它的顶点数、棱数和面数，然后你会发现：正立方体有 8 个顶点、12 条棱和 6 个面，并且 $8-12+6=2$。这个结果例证了多面体的欧拉公式。然后你可以作更多的多面体，并且发现它们都符合欧拉公式。但是例证不是真正的数学证明，我们怎么才能证明“欧拉公式”呢？多面体的 $V-E+F=2$ 的关系最先是由法国哲学家、数学家笛卡儿注意到的，但是他并没有给出一个严格的证明。最早的严格的证明是由欧拉作出的，现在我们较为详细地看一下这个证明：[如下的证明引自美国数学家库朗(R. Courant)和罗宾(H. Robbins)的著作《什么是数学》，由于作图的困难，证明有一定的改动和简化，但没有什么实质的影响。①

“为了证明欧拉公式，我们想象一个其表面用橡皮薄膜做成的空心多面体。这时如果剪掉空心多面体的一个面，我们就把剩下的表面变形、展开、平放到一个平面上。在这个平面上，由顶点和边形成的网络和原来的多面体包含同样多的顶点数和棱数，只是少了一个面。我们现在只需要说明：对于这个平面网络来说，$V-E+F=1$ 就可以了。首先，我们把这个平面网络按下述方式分成‘三角形’：对网络的某个不是三角形的多边形，我们画出它的一条对角线，这样做的效果是使 E 和 F 同时增加 1，因此保持 $V-E+F$ 的值。我们继续画对角线，直到图形完全由三角形组成为止——最终必然

① [美]柯朗 R，罗宾 H. 什么是数学. 左平，等，译. 上海：复旦大学出版社，2005：246-247.

如此。现在，我们就从此图形中去掉三角形，有两种情况，并且只有两种情况：（1）去掉一个三角形，E 和 F 减少 1，而 V 不变，所以 $V-E+F$ 的值不变；（2）去掉一个三角形，V 减少 1，E 减少 2，F 减少 1，所以 $V-E+F$ 的值也不变。总之，无论我们用什么样的方式去掉一个三角形，$V-E+F$ 的值始终不变，由于我们的图形不是由无穷多的三角形组成的，在我们不断去掉三角形的情况下，最终我们将剩下一个三角形，它的顶点数、棱数(边数)和面数的关系是 $V-E+F=3-3+1=1$。欧拉公式得证。”

这个多面体的欧拉公式的证明不同于一般的集合论符号化证明，它很符合我们以上对证明的理解，我们之所以接受这样一个结论，因为此证明的每一步都是非常直观的，但是尽管如此，这个证明也不能彻底地还原到“直观”之上，除了一些无足轻重的符号约定以外(比方说用 V 表示顶点数)，我们还需要一些其他的理想化的规定。

为了使我们的证明是严密的，我们必须理想地规定什么是多面体。考虑这样一个形状，在一个大的正立方体里面有一个小的正立方体。按照语义，它应该也是多面体，因为它也有很多面，但是如果它是多面体，那么并不是所有的多面体都满足多面体的欧拉公式。对于这个“嵌套体”来说，$V-E+F=16-24+12=4$。为了使我们的定理成立，我们必须理想化地规定“嵌套体”不是多面体。

现在，我们考虑这样一个形状，有两个正立方体，它们在一个顶点的地方相联结，或者有两个全等的正立方体，它们共用一条棱。在这两种情况下，都有 $V-E+F=3$，它们也不符合欧拉公式。为了使我们的定理成立，我们还必须理想化地规定：在一个多面体的内部总存在着一个顶点到达另一个顶点的连线，而此连线并不需要经过其他的顶点或者越出该多面体。

现在我们可以说，我们的定理对多面体普遍成立了吗？还不行！因为，我们可以考虑这样的多面体，它是中空的，你可以想象一个有棱角的方形轮胎，它既不是嵌套体，也符合我们上面对多面

体的规定，但是这样的图形一般地不满足欧拉公式，我们现在怎么办呢？我们作理想化的规定：这样的多面体是复杂多面体，我们的定理只满足简单多面体。

在这里，我们清楚地看到了，为了使我们的证明严密，我们一步步地添加了许多理想化的规定，从事后看，这些理想化的规定，对该“定理的成立”来说，都是必需的，没有了它们，我们并不能严密地证明我们的定理。但是，我们在这样做的时候，有人可能又会走向这样的极端，说数学其实是一个约定的事情，一切都归功于理想化的规定。我们也反对这样的观点，因为我们认为“连续”不是理想化的规定，它是纯直观，如果没有了连续，那些理想化的规定都将失去约束力，比方说，在一个欧几里得平面上，一条线可以不知怎么搞的就穿过了另一条线，而没有任何交点。连续也不能用现代数学的方法来约定，现代数学的理想地规定“连续是符合一定条件的集合”的做法有着根本的困难，而连续作为纯直观有着更多的客观性和强迫性。

此外，当我们说在数学中一切都是约定的时候还存在着其他的困难。从上面的例子我们可以清楚地看到，证明必须满足两个基本条件：第一，证明总是把不直观的东西和直观的东西联系起来，否则我们要证明干什么呢？难道我们必须用人类的“受虐倾向”来解释数学中的证明吗？第二，证明的严密性需要一些理想化的规定。从数学史的角度来看，有些理想化的规定是由于具体的数学证明之严密性的需要慢慢地添加的，它们都有着很明显的实践经验的起源。但是我们应该清楚的是，一旦它们作为规定进入数学，它们就是理想化的，纯粹的。所以，约定论的另外一个很大的问题是：仿佛人们能够一下子把所有的理想化的规定都想到似的。约定主义看似谦虚，其实不然，如果说数学是约定的（先不论我们对连续性的不同意见），那么人类必须执行上帝的功能，或者人类一下子就可以全览“柏拉图理念世界”。但是考虑到数学中的难题，比方说“黎曼猜想”，我们并不能靠约定来解决它们。对于约定主义来说，这

难道不是一个谜吗？我们为什么不能凭借我们强大的约定解决它呢？

现在，我们通过一个具体的例子来看一下约定主义的困难。我们现在来看这样一个无穷级数：(1 的平方分之一)+(2 的平方分之一)+(3 的平方分之一)+(4 的平方分之一)+(5 的平方分之一)+(6 的平方分之一)+(7 的平方分之一)+…+(n 的平方分之一)[n 趋近于无穷大]。[①] 这个无穷基数的和是什么呢？我们可以用极限方法判断出这个级数是收敛的，根据现代数学它必须收敛为一个唯一确定的实数，那么，我们现在问：这个实数是什么，它与其他的实数有着什么样的关系？这个看似简单的问题却并不容易回答。事实上，瑞士数学家雅各布·伯努利(Jacob I. Bernoulli，1654—1705)从发现这个问题到他死都没有求出这个级数的和。但对于约定主义来说，这个问题也许是简单的，这个基数的和是 ξ。为什么呢？约定如此。你对这个回答满意吗？如果你满意，我们再看下面这个级数：(2 的平方分之一)+(4 的平方分之一)+(6 的平方分之一)+(8 的平方分之一)+(10 的平方分之一)+(12 的平方分之一)+(14 的平方分之一)+…+($2n$ 的平方分之一)[n 趋近于无穷大]。[②] 这个级数的和又是什么呢？约定主义会说，这个级数的和是 Ж。

如果我们接着问：ξ/Ж 等于什么？如果约定主义说，它就等于 ξ/Ж。你对这样的结果满意吗？我想，你是不满意的。其实，我们从来不需要这样的数学家，这样的数学也是苍白的数学和没有任何美感的数学。ξ/Ж 有精确的值，它等于 4。至于结果为什么如此，考虑到本书的性质，在这里，我们就不详细叙述这个结果的由

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

来了，有兴趣的读者可以利用自己的数学知识来为自己找到答案。[①] 通过这个例子我想说明的是：约定，作为理想化的规定，并不是彻底自由的，它们要与纯直观协调，它们自身也要互相协调。此外，任何精心的约定都不能很好地涵盖我们称之为数学的东西。所以，我们并不同意约定主义的观点，因为他们认为：定理的证明就是把定理还原成既约规则。我们也不同意柏拉图主义的看法，认为数学的一切东西都存在于柏拉图的理念世界里，就等着我们去发现。而我们跟随康德，认为“纯直观”先天地存在于人的内心，数学活动就是往纯直观空间里添加理想化的规定，康德本人，在忽略一些细节的情况下，对此也有类似的表述：“……在空间中对一个直观先天地加以规定(形状)，对时间加以划分(延续)，或者仅仅对有关同一个东西在时间和空间中的综合共相，以及对由此产生出的一般直观的大小(数)加以认识，这却是通过对概念的构造而做的理性工作，它叫做数学性的。”[②]所以，我们认为证明是力图把命题还原到“直观”和“理想化的规定”上，但是，这些理想化的规定并不总是既定的，有时它们产生于“证明本身的强迫”。

① 我们在附录三中给出了一个可能的解答，有兴趣的读者可以参阅。

② [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A724/ B752.

结　语

至此，我们已经可以结束本书了。为了清晰起见，在这里，我简要地总结一下该书的基本观点：我们跟随康德，认为数学命题是先天综合命题。我们说数学命题是综合命题，意思是说：整个数学并不能还原成一个庞大的重言式结构。我们把"先天的"理解成"纯粹的"、"不依赖于任何经验的"和"普遍的"，但我们并不认为"先天的"意味着"必然正确的"，因为数学作为人类理性的产物，原则上是"可错的"，"可错性"和"纯粹性"并不是互相矛盾的概念。正是由于数学的"可错性"，数学是向未来开放的，它不是既定地存在于"柏拉图主义的王国"里，也不既定地存在于"约定主义的约定"里。数学的纯粹性也并不影响数学具有一定的历史文化色彩，因为从我们的数学观出发，作为数学重要组成部分的"理想化的规定"总是与"注意力的方向"联系在一起的，而"注意力的方向"却总是受到历史和文化的牵引，数学中的"理想化的规定"从来就不是一次性完成的。

此外，我们还跟随康德，认为数学本质上需要"纯直观"。这和现代集合论的观点是完全不同的。我们的观点是：集合论是数学的一个分支，但是整个数学并不能归结为集合论；而且我们在原则上反对"还原主义"，所以我们也反对把一切数学都归结为"纯直观"，数学总是需要很多其他的理想化的规定，但因此我们也认为

“纯直观”在数学中也是不可还原的。

数学，虽然历史地看，与经验有着这样那样的关系，数学家也经常受到经验的刺激，但数学本身在原则上是纯粹的，它的扩展，从本质上讲并不需要经验的辅助。现在我们用康德的话结束本书，康德说：“数学提供了一个没有经验的辅助而有幸自行扩展开来的纯粹理性的最光辉的例子。”①

① [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004：A712/ B740.

参考文献

外文参考文献

[1] Bird,Graham. A Companion to Kant. Blackwell Publishing Ltd,2006.

[2] Brown, James Robert. Philosophy of Mathematics. New York and London: Routledge, 2008.

[3] Friedman, Michael. Kant and the Exact Sciences. Massachusetts and London: Harvard University Press, 1992.

[4] Gerhardt, Volker. Friedrich Nietzsche. München: Verlag C. H. Beck oHG, 1992.

[5] Guyer, Paul. Kant and Modern Philosophy. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[6] Hegel G W F. Phänomenologie des Geistes. Frankfurt am Main: Surkamp Verlag, 1970.

[7] Heidegger, Martin. Beiträge zur Philosophie. Frankfurt am Main: Viktorio Klostermann GmbH, 1989.

[8] Heidegger, Martin. Holzwege. Frankfurt am Main: Viktorio Klostermann GmbH, 1950.

[9] Hendricks, Vincent F. Interactions: Mathematics, Physics and Philosophy. Springer, 2006.

[10] Höffe, Otfried. Kant. translated by Marshall Farrier. New York: State University of New York Press, 1994.

[11] Kant, Immanuel. Kritik der reinen Vernunft *1*. Wiesbaden : Insel Verlag, 1956.

[12] Kant, Immanuel. Kritik der reinen Vernunft 2. Wiesbaden : Insel Verlag, 1956.

[13] Merleau-Ponty, Maurice. Phänomenologie der Wahrnehmung. übersetzt von Rudolf Boehm. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1966.

[14] Potter, Michael. Set Theory and its Philosophy. New York: Oxford University Press, 2004.

[15] Psillos, Sathis. Philosophy of Science A-Z. Edinburgh: Edinburgh University Press, 2007.

[16] Rockmore, Tom. In Kant's Wake. Blackwell Publishing Ltd., 2006.

[17] Seidel, Helmut. Von Thales bis Platon. Berlin, Dietz Verlag, 1980.

[18] Tieszen, Richard. Phenomenology, Logic and the Philosophy of Mathematics. New York: Cambridge University Press, 2005.

[19] Waldenfels, Bernhard. Das leibliche Selbst. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag, 2000.

[20] Walker, Ralf C S. Kant—The Arguments of the Philosophers. London, Henley and Boston: Routledge and Kegan Paul, 1978.

[21] Wittgenstein, Ludwig. Philosophical Investigations. Oxford: Basil Blackwell, 1963.

[22] Vattimo, Gianni. Das Ende der Moderne. Stuttgart: Philipp Reklam, 1990.

中文及汉译本参考文献

[1] [英]艾耶尔. 语言、真理与逻辑. 尹大贻, 译. 上海: 上海译文出版社, 2006.

[2] [美]爱因斯坦．相对论的意义．郝建刚，等，译．上海：上海科技教育出版社，2001.
[3] [美]贝纳塞拉夫，普特南．数学哲学．朱水林，等，译．北京：商务印书馆，2003.
[4] [古希腊]柏拉图．理想国．郭斌和，等，译．北京：商务印书馆，2002.
[5] [美]波耶．微积分概念发展史．唐生，译．上海：复旦大学出版社，2007.
[6] 陈纪修，等．数学分析：上册．北京：高等教育出版社，2004.
[7] 陈慕泽，余俊伟．数理逻辑基础．北京：中国人民大学出版社，2003.
[8] [美]戴维斯．逻辑的引擎．张卜天，译．长沙：湖南科学技术出版社，2007.
[9] [法]德里达．胡塞尔“几何学起源”引论．方向红，译．南京：南京大学出版社，2004.
[10] 邓东皋，等．数学与文化．北京：北京大学出版社，1999.
[11] 邓晓芒．康德哲学诸问题．北京：生活·读书·新知三联书店，2006.
[12] [美]恩德滕．数理逻辑．沈复兴，等，译．北京：人民邮电出版社，2007.
[13] 费保俊．相对论与非欧几何．北京：科学出版社，2005.
[14] [美]费恩曼，等．费恩曼物理学讲义：第一卷．郑永令，等，译．上海：上海科技出版社，2005.
[15] [德]弗雷格．弗雷格哲学论著选集．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2006.
[16] [德]弗雷格．算术基础．王路，译．王炳文，校．北京：商务印书馆，2005.
[17] [德]赫费．康德：生平、著作与影响．郑伊倩，译．北京：

人民出版社，2007.
[18] [英]霍伊尔，[印]纳里卡．天文物理学前沿．何香涛，等，译．长沙：湖南科学技术出版社，2005.
[19] [德]康德．纯粹理性批判．邓晓芒，译．杨祖陶，校．北京：人民出版社，2004.
[20] [奥]克拉夫特．维也纳学派．李步楼，陈维杭，译．北京：商务印书馆，1998.
[21] [美]克莱因．数学与知识的探求．刘志勇，译．上海：复旦大学出版社，2005.
[22] [美]克莱因．古今数学思想：第四册．邓东皋，等，译．上海：上海科学技术出版社，2002.
[23] [美]克莱因．数学：确定性的丧失．李宏魁，译．长沙：湖南科学技术出版社，2007.
[24] [美]柯朗，罗宾．什么是数学．左平，等，译．上海：复旦大学出版社，2005.
[25] [美]库恩．科学革命的结构．金吾伦，胡新和，译．北京：北京大学出版社，2003.
[26] [德]赖欣巴哈．科学哲学的兴起．伯尼，译．北京：商务印书馆，2004.
[27] 李文林．数学史概论．北京：高等教育出版社，2002.
[28] 林夏水．数学哲学．北京：商务印书馆，2003.
[29] 罗素．数理哲学导论．晏成书，译．北京：商务印书馆，2003.
[30] [美]莫里兹．数学的本性．朱剑英，编译．大连：大连理工大学出版社，2008.
[31] [美]内格尔，纽曼．哥德尔证明．陈东威，等，译．北京：中国人民大学出版社，2008.
[32] 倪梁康．胡塞尔选集：上、下册．上海：上海三联书店，1996.
[33] [古希腊]欧几里得．几何原本．燕晓东，编译．北京：人民

日报出版社，2005.
[34] [法]彭加勒．科学与假设．李醒民，译．北京：商务印书馆，2006.
[35] [英]彭罗斯．皇帝新脑．许明贤，等，译．长沙：湖南科学技术出版社，1995.
[36] [美]蒯因．从逻辑的观点看．陈启伟，等，译．北京：中国人民大学出版社，2007.
[37] [美]瑞德．希尔伯特．袁向东，李文林，译．上海：上海科学技术出版社，2005.
[38] [德]叔本华．作为意志和表象的世界．石冲白，译．北京：商务印书馆，2006.
[39] 涂纪亮，陈波．蒯因著作集：第2、3卷．北京：中国人民大学出版社，2007.
[40] [美]王浩．逻辑之旅：从哥德尔到哲学．邢滔滔，等，译．杭州：浙江大学出版社，2009.
[41] [德]外尔．数学与自然科学之哲学．齐民友，译．上海：上海科技教育出版社，2007.
[42] [奥]维特根斯坦．逻辑哲学论．贺绍甲，译．北京：商务印书馆，2005.
[43] 徐利治．数学方法论十二讲．大连：大连理工大学出版社，2007.
[44] 余家荣．复变函数．北京：高等教育出版社，2000.
[45] 周民强．实变函数论．北京：北京大学出版社，2001.

附录一

对无穷小量的数学处理

无穷小量在微积分的发展史上所作的贡献是巨大的，但是数学家们对它的疑虑却一直存在，总是试图消除它，在众多的不成功的尝试之后，最后终于被现代数学抛弃了，无穷小量被极限理论所替代，就像《微积分概念发展史》的作者所说："尽管从牛顿和莱布尼茨时代到波尔查诺和柯西时代，许多数学家都避免使用无穷小量，但是也许只有魏尔斯特拉斯毫不含糊的符号表示，才可看做是有效地从微积分里排除了持久不散的固定无穷小概念。"

但是无穷小量在数学分析中确实有很多直观的好处，因此能够无矛盾地在分析学中引入无穷小量总是值得尝试的。1961 年，美国数学家 Robinson 借助现代数理逻辑重新引入了无穷小量，建立了非标准分析，它的基本思想就是利用实数理论的非标准模型来构造无穷小量。但是他引入无穷小的方式并不十分简单，没有现代数理逻辑基础的人根本无法赏析。

一、无穷小量的代数结构

我们现在采用更简单的方法来引入无穷小量：不使用固定的无穷小量，这样的固定的无穷小量是定会引起矛盾的。我们作这样的约定：无穷小量不对应任何给定的实数，每一个给定的实数都包含无穷多个无穷小量，根据此约定，我们可以把所有的一阶无穷小量

表示为$\frac{r}{\nu}$（$r \in \mathbf{R}$，ν 为无穷多）。$\mathbf{R}$ 为实数集合，r 为任一确定的实数。这样我们就会得到与实数一样多的一阶无穷小。所有这些一阶无穷小组成的集合我们可以记为 M。现在我们可以考虑一个扩展实数集合 $\mathbf{R}^*$，它具有如下的性质：实数集和 M 是它的真子集，并且加法和乘法运算对集合 $\mathbf{R}^*$ 封闭。我们把 $\mathbf{R}^*$ 中的所有无穷小量的集合称为 E，由于 $\mathbf{R}^*$ 对乘法运算封闭，所以 E 中包含所有可能的高阶无穷小。显然 E 可以是一个加法交换群，单位元是 0。现在我们可以看出 $\mathbf{R}^*$ 是一个环，并且 E 是环 $\mathbf{R}^*$ 的一个双边理想。

我们可以把集合 $\mathbf{R}^*$ 分成等价类。对于 $\mathbf{R}^*$ 中的任意两个元素 x 和 y，如果 $x-y=e$，$e \in E$，那么 x 和 y 就属于一个等价类。也就是说同一个等价类的扩展实数之间只相差无穷小。0 和所有的无穷小是一个等价类。

现在我们可以考虑这样一个映射，把它记为 norm，它可以把同属于一个等价类的、无穷多的扩展实数映射成唯一一个普通的实数：$\mathrm{norm}(r^*)=r$，特别地，$\mathrm{norm}(e)=0$。这样，norm 就是环 $\mathbf{R}^*$ 到环 $\mathbf{R}$ 的一个同态，在同态 norm 下，E 就是 $\mathbf{R}^*$ 的核，因为 $\mathrm{norm}(e)=0$。$\mathbf{R}$ 就是 $\mathbf{R}^*$ 模 E 的商环 $\mathbf{R}^*/E$，当然 $\mathbf{R}$ 和商环 $\mathbf{R}^*/E$ 同构。

根据以上的分析，我们可有如下关系。

（1）norm 把 $\mathbf{R}^*$ 映射到 $\mathbf{R}$ 上。

（2）$\mathrm{norm}(x)=0$，当且仅当 x 是 0 和各种可能的无穷小量。

（3）$\mathrm{norm}(x+y)=\mathrm{norm}(x)+\mathrm{norm}(y)$。

（4）$\mathrm{norm}(x \cdot y)=\mathrm{norm}(x) \cdot \mathrm{norm}(y)$。

二、无穷小量在数学分析中的运用举例

弄清楚了无穷小量的代数结构，无穷小量就不再是一个神秘莫测的东西了，使用它时我们也不必有不必要的担心。现在我们在新获得的无穷小量的视角下考察分析学中的几个基本概念。

（1）连续　对于一元函数的连续性我们可以轻松地检验：如果说$f(r^*)-f(r)=e$，$e\in E$，那么我们就说函数在r处连续。

（2）导数　一元可导函数在某实数处的导数：

$$\frac{f(r^*)-f(r)}{r^*-r}=f'(r)+e,\quad e\in E。$$

要想得到通常的导数，则$\mathrm{norm}(f'(r)+e)=f'(r)$。

附录二

用单位圆获得三角函数公式

在中学的数学学习中，记忆三角函数的倍角、半角以及和差化积公式总是一件麻烦事，而证明这些公式总是需要构造特殊的图形。我们首先利用单位圆，避开中学所学的三角函数公式，获得欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，而从 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 出发，我们可以代数地获得所有的三角函数公式。

一、借助单位圆获得正弦函数和余弦函数的导函数

在笛卡儿坐标系里考虑一个单位圆，我们把注意力放在第一象限里。以下的数学关系是明显的：单位圆方程

$$x^2+y^2=1, \tag{①}$$

以及

$$\cos\theta=x, \tag{②}$$

$$\sin\theta=y。 \tag{③}$$

重要的一点是，单位圆的弧长和弧度角存在等同关系，即

$$l=\theta。 \tag{④}$$

根据弧长公式，我们有 $dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$。因为我们的目的是先获得正弦函数的导函数，所以我们可以把弧长公式改写为

$$dl=\sqrt{1+(f'(y))^2}\,dy。$$

在第一象限里，根据单位圆的方程①，我们有

$$f'(y)=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

根据我们的目的，我们可以把该式简写为

$$f'(y)=-\frac{y}{x}。\qquad ⑤$$

根据③,④,⑤,②，我们就可以简单地得到

$$\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}=\frac{1}{\sqrt{1+(f'(y))^2}}=x=\cos\theta。$$

用同样的方式，外加一个符号的判定，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta。$$

二、在复平面上，单位圆上的复数对 θ 角的微分和积分构成一个群

在复平面上，单位圆上的复数可以写成 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$。对 θ 进行微分：

$$\frac{\mathrm{d}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta=\mathrm{i}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)。\qquad ⑥$$

对 θ 进行积分：

$$\begin{aligned}\int(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\mathrm{d}\theta&=\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta\\&=-\mathrm{i}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)。\end{aligned}\qquad ⑦$$

在这里，我们很容易可以看出，微分就是“乘以 i”，积分就是“乘以 -i”。这样我们就获得了一个群，群中的元素是{i,-i,1,-1}，该群是一个乘群，单位元是 1，当然，每个元素都有自己的逆元，i 的逆元是-i，1 的逆元是 1，-1 的逆元是-1。在这个群里，很好地张显了微分和积分是互逆的运算。

三、利用单位圆上的复数的性质获得欧拉公式

根据复变函数的结果，在一个单值解析分支里我们总是有

$$\frac{1}{z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}\ \ln z。$$

现在我们把单位圆上的复数代入，得到

$$\frac{1}{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}\mathrm{d}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \mathrm{d}\ \ln(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)。$$

根据⑥式，我们有

$$\frac{\mathrm{i}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\ \ln(\cos\theta + i\sin\theta)。$$

化简并积分我们得到

$$\mathrm{i}\theta = \ln(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

根据指数函数和对数函数的关系，我们就得到了欧拉公式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta。$$

而根据欧拉公式，我们就可以代数地得到所有的三角函数公式，而不用构造特殊的图形。简单地举一例：因为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B)} &= \cos(A+B) + \mathrm{i}\sin(A+B) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}A}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\\ &= (\cos A + \mathrm{i}\sin A)(\cos B + \mathrm{i}\sin B),\end{aligned}$$

所以

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B,$$

$$\sin(A+B) = \cos A\sin B + \sin A\cos B。$$

附录三

用傅立叶级数获得 π 的展开式和求解伯努利难题

一、用傅立叶立级数获得 π 的展开式

为得到 π 的无穷级数，人们使用过的方法有割圆法、反正弦法、反正切法等。最常见的方法是反正切法。运用傅立叶级数我们也可以方便地得到 π 的无穷展开式。

为了得到 π 的无穷级数，我们可以考虑建立这样一个周期为 2π 的函数 $f(x)$，它在 $[-\pi,\pi)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi。\end{cases}$$

现在我们把这个周期函数展开成傅立叶级数。该函数在 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 点处不连续，其余各点处处连续，所以函数的傅立叶级数收敛。当 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，级数收敛于 $\frac{-1+1}{2}=0$；当 $x\neq k\pi$ 时，级数收敛于 $f(x)$。

现在我们来确定 $f(x)$ 的傅立叶系数。注意到 $f(x)\cos nx$ 为奇函数，$f(x)\sin nx$ 为偶函数，我们可以得到

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots。\end{cases}$$

将求得的系数代入，我们得到函数$f(x)$的傅立叶展开式为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x+\cdots\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

现在我们考虑 $x=\frac{\pi}{2}$时函数的值。当 $x=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)=1$，也就是说：

$$1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right),$$

移项整理，我们得到

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots。$$

这和莱布尼茨用反正切的方式得到的结果是一样的。

我们还可以考虑 x 的其他取值。当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，我们有

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}-\frac{1}{9}-\frac{1}{22}+\cdots。$$

该级数的规律是：三个正的，三个负的，交替前行，在每三个同号的分数当中，中间的那个分数的分母不用乘以 2，保持为原来顺序中的奇数，其他的都要乘以 2。数学大师陈省身曾评价莱布尼茨的 π 的展式说，这个式子实在美妙极了。莱布尼茨的 π 的展式之所以美妙，是因为它没有用到根式，分母只是简单的奇数，它们交错排列。我们以上用傅立叶级数得到的 π 的展式也有一定的简单性。

当 $x=\frac{\pi}{4}$时，我们得到

$$\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\cdots\right)。$$

该级数的规律是：括号里的分数两个正的，两个负的，交替前行，分母是相应的奇数乘以 2。当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，我们得到

$$\frac{\pi}{4}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{22}+\frac{1}{26}-\frac{1}{34}+\frac{1}{38}-\cdots\right)。$$

该级数的规律是：括号里的分数正负交替，分母是相应的奇数乘以 2，不过 3 的倍数的奇数都不出现在级数里。我们还可以用傅立叶级数得到更多 π 的展开式，这里就不一一列举了。

二、用傅立叶级数求解伯努利难题

雅各布·伯努利（Bernoulli，1654—1705）是瑞士著名的数学家。他对无穷级数很有研究，但有一个无穷级数求和却难倒了他，这个级数是 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$。伯努利到死也没有求出这个级数的和。后来，大数学家欧拉（Euler，1707—1783）用类比的方式求出了这个级数的和，不过，欧拉的方式虽然很巧妙，但有其不太严格的地方。欧拉的方法我们这里就不再赘述。

我们用傅立叶级数来计算这个级数的和，考虑建立这样一个周期为 2π 的周期函数，它在[-π，π)上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

该函数满足收敛定理的条件。现在我们来计算它的傅立叶系数：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos nx)\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n}。$$

将求得的系数代入，我们得到该函数的傅立叶展开式为

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$$+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq k\pi,\ k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots)。$$

我们来考虑 $x=0$ 的情况：当 $x=0$ 时，函数

$$f(x)=0=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)。$$

整理得

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}。$$

我们再建立起另外一个周期为 2π 的函数，令其在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$。函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty<x<+\infty)$ 处处连续，满足收敛定理的条件，且处处收敛于 $f(x)=x^2$。又由于 $f(x)=x^2$ 为偶函数，所以其傅立叶系数 $b_n=0$（$n=1,2,3,\cdots$），其他的傅立叶系数计算如下：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n\frac{4}{n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots)。$$

把系数代入，我们得到

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x-\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty)。$$

我们仍考虑 $x=0$ 的情况。当 $x=0$ 时，我们有

$$f(x)=x^2=0=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots\right)。$$

整理得

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots=-\frac{\pi^2}{12}。$$

上面我们已经计算出

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8},$$

于是根据 $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots=-\frac{\pi^2}{12}$，我们可以轻易地得到

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{24}。$$

综合这两个结果，我们就得到伯努利难题的正确的解：

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}。$$

附录四

对连续统假设的一个否定性说明的尝试

连续统假设被希尔伯特在《数学问题——在1900年巴黎国际数学家代表会上的讲演》中称为数学中的头号问题，可见这个问题的重要性。在《数学问题》中，连续统假设的名称是“康托的连续统基数问题”，希尔伯特对它的表述是这样的：“每个由无穷多实数组成的系统，即每个(无穷)数集(或点集)，或者等价于自然数的集合1,2,3,…，或者等价于全体实数的集合，从而等价于连续统，即一条直线上点的全体；因此，就等价关系而言，只有两种(无穷)数集，可数集和连续统。”(希尔伯特的这个表述现在被称为狭义连续统假设，因为在现代数学中还有广义连续统假设)希尔伯特认为，这个定理(其实是假设)是非常重要的，他说：“由这条定理，立即可以得出结论：连续统所具有的基数，紧接在可数集基数之后；所以这个定理的证明，将在可数集和连续统之间架起一座新的桥梁。”

如果说人们能在可数集和连续统之间架起一座桥梁，那么很多数学问题将会得到解决。但是遗憾的是，自从希尔伯特提出这个问题以来，已经有一百多年过去了，这个问题并没有如数学家所愿地解决。在这一百多年里，很多数学家都对此付出了巨大的努力。1940年，哥德尔用构造模型的方法证明了：连续统假设与我们现

在常用的集合论系统——策梅罗-弗兰克尔(ZF)系统是无矛盾的，当然，前提是策梅罗-弗兰克尔系统本身是一致的。这个看起来是一个有利于证实连续统的结果；然而，在1963年，斯坦福大学的数学教授柯恩(Paul Cohen)证明了：在策梅罗-弗兰克尔系统是一致的情况下，连续统假设并不能基于它而得到证明。综合他们两人的证明，我们看到：连续统假设在策梅罗-弗兰克尔集合论公理系统中既不能证明是错误的，也不能证明是正确的，它是不可判定的。

对连续统的考察一般都是在集合论的范围内，现在我们尝试在测度论的视角下考察连续统假设。

首先来构造一个不可测集。现在我们考虑一个一维实数集合$[a, b]$，根据测度论，它的测度当然是$b-a$。现在，对于$[a, b]$中的所有实数点x与y，若$x-y\in \mathbf{Q}$($\mathbf{Q}$在这里表示有理数)，就记为$x\sim y$，这是一个等价关系，根据这一等价关系，我们就可以把$[a, b]$中的所有实数点进行分类，凡有等价关系者均属一类。由这个分类可知，所有的有理数是属于一个等价类的，因为有理数减去有理数还是有理数。现在我们可以从每一个等价类中挑选出一个元素来组成一个新的集合，这个“选择集”就是一个不可测集。

因为如果这个“选择集”是可测的，那么只有两种情况：要么它的测度是0，要么它的测度不是0。现在分别考虑：

如果它的测度是0，那么根据可测集合的测度具有平移不变性，我们将得到这样的结果：原来的一维实数集合$[a,b]$的测度是0，这显然是错误的；如果该“选择集”的测度不是0，这就意味着在该选择集中存在点y与z，并且$y-z=x$，x是有理数，但这是不可能的，因为这与该选择集的构成矛盾。

上述的不可测集合是一个定义完好的集合，它并不是一个不合适的集合。它的构造完全符合ZFC公理系统的要求。

因为：闭区间$[a,b]$是一个集合。根据分出公理，在$[a,b]$中，符合等价关系$x-y\in \mathbf{Q}$的每一类数都构成一个集合。再根据选择公

理，所以上述的不可测集是一个合适的集合。

根据现代集合论，集合的基数是可以有序化的，即对于任意两个集合 X 和 Y，我们总有：

$\mathrm{card}\,X<\mathrm{card}\,Y$ （X 集合的基数小于 Y 集合的基数），

$\mathrm{card}\,X=\mathrm{card}\,Y$ （X 集合的基数等于 Y 集合的基数），

$\mathrm{card}\,X>\mathrm{card}\,Y$ （X 集合的基数大于 Y 集合的基数）。

如果我们把以上的不可测集记为 S，那么它的基数和自然数集合的基数 N，以及连续统基数 C 分别具有三种关系：

（1） 和 N 的关系：

$N<\mathrm{card}\,S$ （S 集合的基数大于 N），

$N=\mathrm{card}\,S$ （S 集合的基数等于 N），

$N>\mathrm{card}\,S$ （S 集合的基数小于 N）。

（2） 和 C 的关系：

$\mathrm{card}\,S<C$ （S 集合的基数小于 C），

$\mathrm{card}\,S=C$ （S 集合的基数等于 C），

$\mathrm{card}\,S>C$ （S 集合的基数大于 C）。

我们先看(1)，如果说 $\mathrm{card}\,S$ 等于 N，或者说小于 N，那么 S 的测度将是零，因为根据测度论，可数集合与具有可数无穷多元素的集合的测度都是零。但根据以上的结论，我们知道，这是不可能的，所以只剩下一种情况：$N<\mathrm{card}\,S$(S 集合的基数大于 N)。

我们再来看(2)，$\mathrm{card}\,S>C$ 是不可能的，因为 S 是闭区间$[a,b]$的真子集。如果说，$\mathrm{card}\,S<C$，那么根据(1)，我们就有 $N<\mathrm{card}\,S<C$。这就意味着连续统假设被我们否定了。

但是，我们现在没有理由判定 $\mathrm{card}\,S<C$，因为一个无穷集合的真子集的基数可能等于该集合的基数。我们先假定连续统假设是正确的，那么我们现在就只剩下一种情况，即 $\mathrm{card}\,S=C$。

现在我们来看一个问题，不可测集 S 虽然具有连续统的基数，但是该集合是连续的吗？凭直观，我们会觉得集合 S 是不连续的。但是，直观有时候是不可靠的。我们还是先看看数学家对连续性的

定义。在这里，我们选取罗素对连续性的定义。罗素的定义借鉴了数学家戴德金(Dedekind)和康托尔(Cantor)对实数连续性的定义。在这里，我们只选取一种定义来介绍，它的主要方法是来源于康托尔对实数连续性的定义。当然，罗素在这里对连续性的规定并不仅限于实数集，而是面向任何可能的集合的，就像彭加勒在《科学与假设》中所说："数学家研究的不是客体，而是客体之间的关系，这些客体被其他客体代换是无关紧要的。"所以，对于数学家来说，只要一个集合，无论它是什么的集合，如果它满足了下述规定，那么它就是连续的。

罗素对"连续性"的定义是这样的：

(1) 如果序列中的每一个分子(元素，项)都是一个序级或者反序级的极限，那么这个序列就是"内在凝聚的"(condensed in itself)。

(2) 如果包含在一个序列中的每一个序级或反序级都有一个极限，那么这序列称为是"封闭的"(closed)。

(3) 如果一个序列是内在凝聚的和封闭的，就是说，该序列的各项都是一个序级或反序级的极限，并且包含在该序列中的每一个序级或反序级都在该序列中有一个极限，那么，这一序列被称为是"完备的"(perfect)。

(4) 如果一个序列的"中间类"乃是关系域的一个子类，并且在序列的任何两项之间有这类的一些分子，那么这样的序列被称为是"紧致的"(有些书上称"稠密的")。

(5) 如果一个序列是紧致的和完备的，那么这序列就是"连续的"。

根据罗素的定义，我们可以清楚地判断出，集合 S 不是连续的，因为它不完备。我们通过一个例子来清楚地了解这一点：比方说，集合 S 是这样构造出的：先选实数闭区间 $[0,100]$ 作初始集合，然后用 $x-y \in \mathbf{Q}$ 的方式作等价类，最后在每一等价类中挑选一个元素构成一个集合。如果说这个集合里恰巧没有零，那么，在不

违反任何构成规则的情况下，我们可以理想地造出这样一个序列：

$$\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{6},\ \cdots,\ \frac{\pi}{n}\quad (n\to\infty)。$$

显然，该序列的每个元素都属于集合 S，但我们知道这个序列收敛于0，而0就如我们前面所设定的，不在集合 S 中，所以集合 S 并不完备。

形象地来看，该集合也不稠密，就是说，如果我们用“无厚”的刀来砍这个集合，那么它并不能像实数集合那样，保证我们处处砍中一个元素，我们有可能落在“空”里。

现在我们就得到了一个重要的结果：集合 S 虽然具有连续统的基数，但是该集合并不连续。

两个集合有相同的基数是什么意思呢？按照康托尔，就是它们的元素可以形成一一对应的关系。在我们这里，也就是说集合 S 与实数集的元素一样多，它们的元素可以形成一一对应。如果我们几何地理解这一切，也就是说，两个集合有相同多的点。我们知道，在几何中，点和点是没有任何差别的。如果点与点没有分别，并且两个集合的点一样多，那么这两个集合的区别是什么呢？我们只能说每个点的编号（标记）不一样，实数集的点连续，是因为它具有实数的编号；集合 S 的点不连续，是因为它不具有实数的编号。

现在我们考虑两堆花砖，这两堆花砖一样多（可以形成一一对应），并且花砖之间没有分别。把两堆花砖都排列成直线，把 A 堆排得稠密些，用1,2,3等编号；把 B 堆排得稀疏些，用甲、乙、丙等编号。现在我们只一一调换编号，A 堆会因此变得稀疏，B 堆会因此变得稠密吗？不会，编号的调换对花砖实际的松紧排列不会有改变。同理，如果我们只调换实数集和集合 S 的元素的编号，那么集合 S 会因此变得连续吗？应该也不会。不然的话，数学就成了魔术，就像一个瓶子里装的是水，外面的标签上也写的是水，如果我们把标签换成写有汽油的标签，那么瓶子里的水瞬间就变成了汽油。

也许你会说，且慢，实数集和集合 S 中元素的编号不能调换，

原因是这些编号标示着这些元素间的距离，或者说标示着它们在数轴上离开原点的距离。但是这样一来，我们是不是已经引入了对空间关系的直观呢？而对空间关系的直观正是许多数学哲学家想避免的。但是，如果禁止人们对空间关系直观，你能说出数轴上的点 1 和点 2 有什么本质的区别吗？

在寻常的集合论公理（通常称为 ZF 或 ZFC）中，人们一般认为，外延性公理是没有争议的公理。它的表述是这样的：一个集合完全由它的成员确定；即两个不同的集合不可能含有相同的成员。若 X 与 Y 具有相同的成员，则 $X=Y$。这看来是很好理解的，如果集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c\}$，我们就说 $A=B$。如果 $C=\{a,b,c,d\}$，我们就说 C 与 A 和 B 都不等。就像王浩所说，这可以看成集合的一个定义特征（而不是性质）。那么，我们现在问集合 S 和实数集合是同一个集合吗？如果我们确定它们所包含的点一样多，并且点和点之间是无区别的，那么我们不得不承认它们是同一个集合。如果我们不认为它们是同一个集合，那么我们是不是已经援引了点与点之间的空间关系呢？

我想，现在我们应该达成这样的共识：如果人们完全排除对空间关系的直观，就像很多数理逻辑学家所做的那样，那么我们将面临一个荒谬的现象，这种现象除了称之为魔术，我们大概没有其他更好的词汇。

现在来总结一下：数学的各个分支如果说是协调一致的，比方说集合论和测度论之间不存在矛盾，并且数学家不承认直观，另外他们也足够诚实，不相信魔术，那么连续统假设就是错误的，因为这时我们只能相信集合 S 的基数小于实数集合的基数。

但是，恕我直言，现在的很多数学家不愿意承认集合论和测度论之间存在矛盾以及它们可能是错误的，因为他们也不承认直观。他们仍然保留连续统假设是正确的可能性，否认其他数学家在援引直观的（或者思想实验的）基础上对连续统所作的否定，他们情愿相信魔术。

[General Information]
书名=康德的数学哲学
作者=包向飞著
页数=215
SS号=13166975
DX号=
出版日期=2013.01
出版社=武汉大学出版社